DM n° 6 - pour le mardi 2 décembre 2024

Exercice 1 : d'après Edhec

Un mobile se déplace aléatoirement sur un axe dont l'origine est le point O d'abscisse 0.
Au départ (instant 0) le mobile est situé sur le point O.
Le déplacement du mobile se déroule de la façon suivante:

- à l'instant 1, il se place de façon équiprobable sur le point d'abscisse 0 ou le point d'abscisse 1,
- à l'instant 2, il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisse 0, 1 ou 2,
- plus généralement, à l'instant n (où $n \in \mathbb{N}^*$), il se place de façon équiprobable sur l'un des points d'abscisse $0, 1, \ldots, n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note X_n l'abscisse du mobile à l'instant n (on a donc $X_0 = 0$). On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On admet aussi que les variables aléatoires X_n ($n \in \mathbb{N}$) sont mutuellement indépendantes.

1. (a) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la loi de X_n.
   (b) Donner l'espérance et la variance de X_n.
2. (a) Proposer un programme `Python` qui simule la trajectoire du mobile en affichant son abscisse lors des n premiers déplacements, l'entier n étant entré au clavier par l'utilisateur.
   (b) Compléter le programme de la question précédente afin de calculer et d'afficher l'abscisse maximale atteinte par le mobile.
3. On note Y le rang du premier retour à l'origine du mobile et on admet que Y est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   (a) Peut-on affirmer que Y suit la loi géométrique? *On justifiera soigneusement la réponse.*
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer l'événement $(Y = n)$ à l'aide des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$.
   (c) En déduire que la loi de Y est définie par: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) = \frac{1}{n(n+1)}$.
   (d) Vérifier par le calcul que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(Y = n) = 1$.
   (e) La variable Y admet-elle une espérance?
4. (a) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, on a : $\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.
   (b) En déduire que pour tout $j \geq 2$, $\ln(j) \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \leq \ln(j) + 1 - \frac{1}{j}$.
   (c) Conclure alors que $\displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{k} \underset{j \to +\infty}{\sim} \ln(j)$ (résultat classique !).
5. On note Z le rang du deuxième retour à l'origine du mobile et on admet que Z est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
   (a) Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Déterminer, pour tout entier $i \geqslant j$, la probabilité $P_{(Y=i)}(Z = j)$.
   (b) Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Établir que:
   $$\forall i \in [[0, j-1]],\ P_{(Y=i)}(Z = j) = \frac{i+1}{j(j+1)}.$$
   (c) Écrire, pour tout entier $j \geqslant 2$, la probabilité $P(Z = j)$ comme une somme finie.
   (d) La variable aléatoire Z possède-t-elle une espérance?
6. Compléter le programme suivant pour qu'il simule les variables Y et Z:

```
n=0# nombre de déplacements
r=0# nombre de retours à l'origine
while .......... :
n=..............
X= .....
print(X)
if X==.......... :
          r=..........
          if r== ......... :
                 y=n
z=.......
print("Y=",y)
print("Z=",z)
```

Exercice 2 - Etude de variables à densité

Partie 1: préliminaire et présentation de deux variables aléatoires X et T

1. On rappelle que la fonction arc tangente, notée Arctan, est la bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   (a) Rappeler l'expression, pour tout réel x, de $\text{Arctan}'(x)$.
   (b) Donner la valeur de Arctan(1) puis montrer que, pour tout réel x strictement positif, on a:
   $$\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$
   (c) Justifier l'équivalent suivant : $\text{Arctan}(x) \sim_{x \to 0} x$
2. (a) Vérifier que la fonction f qui à tout réel x associe $f(x) = \dfrac{1}{\pi(x^2+1)}$ peut-être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer la fonction de répartition F de X.
3. (a) Vérifier que la fonction g telle que
   $$\forall x \in R,\quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}\, e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$
   peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire T à valeurs dans $\mathbb{R}_+^\star$.
   (b) Déterminer la fonction de répartition G de T.

Partie 2: étude d'une suite de variables aléatoires associée à X.

On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ de variables aléatoires, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que X.
Pour tout entier naturel n non nul, on pose $M_n = Max(X_1, \dots, X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. (a) Déterminer la fonction de répartition F_{M_n} de M_n.

   (b) On pose, pour tout entier n de $\mathbb{N}^\star$, $Y_n = \dfrac{\pi}{n} M_n$. Justifier que la fonction de répartition de Y_n, notée G_n, est donnée par:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \left(\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{nx}{\pi}\right) + \frac{1}{2}\right)^n$$

2. (a) Déterminer, pour tout x négatif ou nul, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x)$.

   (b) Montrer que, pour tout x strictement positif, on a:

$$G_n(x) = \left(1 - \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{\pi}{nx}\right)\right)^n$$

   (c) En déduire pour tout x strictement positif, la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} G_n(x)$.

   (d) Montrer alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to+\infty} G_n(x) = G(x)$.