ECG2 - Lycée Saint Just
Mathématiques Approfondies 2024/25

Programme de colle - **Semaine 9**
du 2 au 6 décembre 2024

## `Informatique : programmation en langage Python`

Notamment : **simulation des variables discrètes usuelles en Python** (loi uniforme discrète, loi binômiale, géométrique, de Poisson, générateur `rd.random()`).

## Chapitre 6. Variables aléatoires réelles discrètes (suite et fin)

1. Généralités
2. Lois usuelles
3. Somme de deux variables indépendantes :
   - Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1, p)$ $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_2, p)$ et $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$. A comprendre avec le modèle.
   - Somme de $m$ variables indépendantes suivant des lois binômiales de même paramètre $p$.
   - Somme de variables de Bernoulli.
   - Explosion d'une variable binômiale : si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$, alors $X = X_1 + \cdots + X_n$ où les $X_k$ sont des variables indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(p)$. Lien avec le modèle.
   - Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$, $X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$ et $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$ (*) **PREUVE A MAITRISER**
   - Somme de $n$ variables indépendantes suivant une loi de Poisson (* **preuve par récurrence+ lemme de coalition à maîtriser**).
4. Espérance
   - Définition pour les variables discrètes. Cas fini ou infini.
   - Linéarité de l'espérance :
     - Si $X$ admet une espérance, alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + b$ aussi et
     $$E(aX + b) = aE(X) + b$$
     - Si $X$ et $Y$ admettent une espérance, alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $aX + bY$ aussi et
     $$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$
     - Si $X_1$, ..., $X_n$ admettent une espérance alors $a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$ aussi et
     $$E(a_1X_1 + \cdots + a_nX_n) = a_1E(X_1) + \cdots + a_nE(X_n)$$



   - **Critère de domination** : si $0 \leq |X| \leq Y$ où $Y$ est une VARD admettant une espérance alors $X$ admet une espérance et
   $$|E(X)| \leq E(|X|) \leq E(Y)$$
   - Si $X \geq 0$ et $E(X)$ existe alors $E(X) \geq 0$.
   - Croissance de l'espérance : si $X \leq Y$, $X$ et $Y$ admettent une espérance alors $E(X) \leq E(Y)$.
   - **Variable bornée : si $X$ est bornée** : si $a \leq X \leq b$ alors $X$ admet une espérance et $a \leq E(X) \leq b$.
   - **Théorème de transfert** : cas des variables discrètes finies, des variables discrètes infinies.

   Exercice de cours à savoir refaire :
   Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y = \frac{1}{1+X}$. Montrer que $Y$ admet une espérance puis calculer $E(Y)$.

   - **Espérance du produit de deux variables indépendantes** : si $X$ et $Y$ admettent une variance et sont indépendantes alors $E(XY) = E(X).E(Y)$.
   - Loi conditionnelle.
   - **Définition de l'espérance conditionnelle**
   - **Formule de l'espérance totale**
   - Exercice classique : loi de Poisson suivie d'une loi binômiale
   *Peut être posé en colle !!* Tout ou une partie seulement...
   Soit $\lambda$ un réel strictement positif et $p \in ]0, 1[$.
   Le nombre de véhicule arrivant sur le périphérique en un jour est une variable aléatoire $X$ suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda$.
   On suppose que chaque voiture présente sur le périphérique, a la probabilité $p$ de prendre la sortie "Part-Dieu" et la probabilité $q = 1 - p$ de prendre une autre sortie, et ceci indépendamment des autres voitures.
   On note $Y$ et $Z$ les variables aléatoires égales respectivement au nombre de véhicules prenant la sortie "Part-Dieu" et au nombre de véhicules prenant une autre sortie en un jour donné.
     (a) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de $Y$ conditionnelle à l'événement $(X = n)$ ainsi que l'espérance conditionnelle $E(Y|(X = n))$.
     ii. Déterminer l'espérance de $Y$.
     (b) Déterminer la loi de $Y$ , vérifier l'espérance calculée au 1.b
     (c) Quelle est la loi de $Z$ ?
     (d) $Y$ et $Z$ sont-elles indépendantes ?
5. Variance : définition, formule de Huygens, $V(aX + b)$, $V(X + Y)$ dans le cas où $X$ et $Y$ sont indépendantes. Ecart-type.

**Chapitre 7 - Variables à densité (début)**

1. Fonction de répartition
   - Définition et propriétés : limites, croissante, continuité à droite en tout point.
   - Propriété supplémentaire : $P(X=a) = F_X(a) - \lim_{t\to a^-} F_X(t)$.
   - $F$ est une fonction de répartition d'une certaine VAR $X$ si
     - $F$ est fonction continue à droite en tout réel.
     - $F$ est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
     - $\lim_{t\to-\infty}(F_X(t)) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty}(F_X(t)) = 1$
2. Variable à densité
   - $X$ est **une variable aléatoire à densité** lorsque sa fonction de répartition $F_X$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus E$ où $E$ est un ensemble fini ("de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en quelques points").
   - Une fonction $f$ est une densité de probabilité si $f$ positive, $f$ continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.
   - Si $X$ est une variable à densité, on obtient une densité de $X$ en dérivant $F_X$ partout où c'est possible et en donnant une valeur (positive) pour les autres points.
   - Si $X$ a pour densité $f$ alors
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$
   - Points critiques d'une variable à densité : points où $F$ n'est pas dérivable, où $f$ n'est pas continue.
   - Univers image $X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) > 0\}$
   - $P(X=a) = 0$, $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = ... = F_X(a) - F_X(b)$.
3. Transformées d'une variable à densité
   - Transformation affine d'une variable à densité
   - Méthodes pour loi de $X^2$, de $|X|$, de $\lfloor X \rfloor$.
4. Espérance d'une variable à densité
   - Définition, propriétés.
   - Théorème de transfert pour les variables à densité.
5. Variance d'une variable à densité
   - Existence et calcul de $E(X^2)$.
   - Définition de la variance.
   - Formule de Koenig-Huygens.



   - Propriétés de la variance.
   - Ecart-type.
6. Lois usuelles (début)
   - **Loi uniforme sur** $[a,b]$ : densité, fonction de répartition, espérance (*), variance (*).
   Stabilité par transformation affine : si $X$ suit une loi uniforme et si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$, alors $Y = \alpha.X + \beta$ suit aussi une loi uniforme, que l'on peut préciser en déterminant $Y(\Omega)$.
   - **Loi exponentielle de paramètre** $\lambda > 0$ : densité, fonction de répartition, espérance (*), variance. Attention paramètre inversé dans la simulation Python.
   Stabilité : si $\alpha > 0$ alors $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$ (* savoir montrer le sens $\Rightarrow$).
   Variante qui revient au même $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha) \Leftrightarrow \alpha X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$
   Loi d'un processus sans mémoire : comprendre.

.

(*) : **preuve exigible**