

Informatique : programmation en langage Python

Notamment : **simulation des variables discrètes usuelles en Python** (loi uniforme discrète, loi binômiale, géométrique, de Poisson, générateur `rd.random()`).

Chapitre 7 - Variables à densité (tout sauf Bienaymé-Tchebychev)

1. Fonction de répartition

- Définition et propriétés : limites, croissante, continuité à droite en tout point.
- Propriété supplémentaire : $P(X = a) = F_X(a) - \lim_{t \rightarrow a^-} F_X(t)$.
- F est une fonction de répartition d'une certaine VAR X si
 - F est fonction continue à droite en tout réel.
 - F est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
 - $\lim_{t \rightarrow -\infty} (F_X(t)) = 0$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} (F_X(t)) = 1$

2. Variable à densité

- X est une **variable aléatoire à densité** lorsque sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus E$ où E est un ensemble fini ("de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en quelques points").
- Une fonction f est une densité de probabilité si f positive, f continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.
- Si X est une variable à densité, on obtient une densité de X en dérivant F_X partout où c'est possible et en donnant une valeur (positive) pour les autres points.
- Si X a pour densité f alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

- Points critiques d'une variable à densité : points où F n'est pas dérivable, où f n'est pas continue.
- Univers image $X(\Omega) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tels que } f(x) > 0\}$
- $P(X = a) = 0$, $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = \dots = F_X(a) - F_X(b)$.

3. Transformées d'une variable à densité

- Transformation affine d'une variable à densité
- Méthodes pour loi de X^2 , de $|X|$, de $\lfloor X \rfloor$.

4. Espérance d'une variable à densité

- Définition, propriétés.
- Théorème de transfert pour les variables à densité.

5. Variance d'une variable à densité

- Existence et calcul de $E(X^2)$.
- Définition de la variance.
- Formule de Koenig-Huygens.
- Propriétés de la variance.
- Ecart-type.

6. Lois usuelles

- Loi uniforme sur $[a, b]$: densité, fonction de répartition, espérance (*), variance. Stabilité par transformation affine : si X suit une loi uniforme et si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$, alors $Y = \alpha.X + \beta$ suit aussi une loi uniforme, que l'on peut préciser en déterminant $Y(\Omega)$.
- Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$: densité, fonction de répartition, espérance (*), variance. Attention paramètre inversé dans la simulation Scilab. Stabilité : si $\alpha > 0$ alors $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$ (savoir démontrer une implication *). Variante qui revient au même $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha) \Leftrightarrow \alpha X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ Loi d'un processus sans mémoire : comprendre.
- Loi normale
 - Rappel : intégrale de Gauss.
 - Loi normale centrée réduite : densité, fonction de répartition Φ , espérance, variance. Propriétés de Φ : $\Phi(0) = \frac{1}{2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ (sert tout le temps)
 - Loi normale de paramètres m et σ^2 : densité, fonction de répartition, espérance, variance.
 - Stabilité par transformation affine : si X suit une certaine loi normale, si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$, alors $Y = \alpha.X + \beta$ suit aussi une loi normale. On déterminera ses paramètres en calculant $E(Y)$ et $V(Y)$.
 - Centrage-réduction : si $X \hookrightarrow N(m, \sigma^2)$ alors $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
 - Table des valeurs de la fonction Φ : à savoir utiliser.

- Loi petit gamma
 - Rappels sur la fonction Gamma.
 - Densité, espérance (*), variance (*) : calculs rapides grâce à la fonction Gamma.
 - On remarque que $X \hookrightarrow \gamma(1) \Leftrightarrow X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

• **Produit de convolution pour les variables à densité**

A utiliser pour trouver la loi de $X+Y$ où X et Y sont à densité et indépendantes.

Théorème

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à densité **indépendantes** définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ de densités respectives f_X et f_Y .

On note $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)dt$

- **Version 1 : si la fonction h est définie, continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points alors h est une densité et $X+Y$ est une variable aléatoire à densité de densité h donc :**

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)dt$$

- **Version 2**

Si f_X ou f_Y est bornée sur $\mathbb{R}$ alors la fonction h est une densité et $X+Y$ est une variable aléatoire à densité de densité h donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)f_Y(t)dt$$

On regardera donc d'abord si l'une des deux densités est bornée **pour pouvoir appliquer la version 2**, et sinon à défaut on se ramène à la version 1.

Exercice à savoir refaire : Soient λ et μ des réels strictement positifs tels que $\lambda \neq \mu$.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ suivant toutes les deux des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ .

On note $Z = X + Y$.

Justifier que Z est une variable à densité et déterminer une densité de Z

7. Stabilité pour la somme : loi gamma et loi normale

- Si $X_1 \hookrightarrow \gamma(\nu_1)$, si $X_2 \hookrightarrow \gamma(\nu_2)$ (où $\nu_1 \in]0, +\infty[$ et $\nu_2 \in]0, +\infty[$) et si X_1 et X_2 sont des variables **indépendantes** alors $\boxed{X_1 + X_2 \hookrightarrow \gamma(\nu_1 + \nu_2)}$
- Si $\forall k \in [[1, m]]$, $X_k \hookrightarrow \gamma(\nu_k)$ et si les m variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_m$ sont **mutuellement indépendantes** alors $\boxed{X_1 + X_2 + \dots + X_m \hookrightarrow \gamma(\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_m)}$
- Conséquence pour une somme de variables indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

- Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, si $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ et si X_1 et X_2 sont des variables indépendantes alors

$$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

- Si $\forall k \in [[1, r]]$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$ et si les r variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_r$ sont **mutuellement indépendantes**, alors

$$X_1 + X_2 + \dots + X_r \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + \dots + m_r, \sigma_1^2 + \dots + \sigma_r^2)$$

8. Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev (début)

- Inégalité de Markov.

Démonstration guidée sous forme d'exercice (*) à savoir refaire :

Soit X une variable aléatoire (à densité ou discrète), admettant une espérance, telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.

Soit a un réel strictement positif. On note A l'événement $A = [X \geq a]$ On note $\mathbb{1}_A$ la variable indicatrice de l'événement A .

- Rappeler la définition de la variable $\mathbb{1}_A$.
- Calculer l'espérance de la variable $\mathbb{1}_A$.
- Montrer que $a \times \mathbb{1}_A \leq X$. En déduire l'inégalité de Markov.

(*) : **preuve exigible**