Exercices - Chapitre 8 - Algèbre bilinéaire I

Exercice 1
Soit n un entier naturel non nul et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Pour tout (P,Q) de E^2, on note :

$$\langle P,Q\rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt.$$

1. Soit k un entier naturel. Justifier que l'intégrale $I_k = \int_0^{+\infty} t^k.e^{-t}dt$ existe et préciser sa valeur.
2. En déduire que pour tout $(P,Q) \in E^2$, $<P,Q>$ est bien défini.
3. Montrer que $(P,Q) \mapsto <P,Q>$ définit un produit scalaire sur E.
4. Calculer, $\langle X^i, X^j\rangle$ pour tout $(i,j) \in [[0,n]]^2$.

Exercice 2
Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = P(1) = 0\}$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dimension.
2. On considère l'application Φ de $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (P,Q) \in E^2,\ \ \Phi(P,Q) = -\int_0^1 P(x)Q''(x) + P''(x)Q(x)dx$$

   (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall P \in E$, $\Phi(P,P) = 2\int_0^1 \left(P'(x)\right)^2 dx$.
   (b) Montrer que Φ est un produit scalaire sur E.

Exercice 3
Orthonormalisation
Justifier que la famille $\big((1,1,0),(1,2,1),(-1,3,-1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis en appliquant le procédé de Schmidt, construire une base de $\mathbb{R}^3$ orthonormale pour le produit scalaire canonique.

Exercice 4
On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_2[X])^2$, $\langle P,Q\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$.
On note $P_0 = 1$, $P_1 = 2X - 1$, $P_2 = 6X^2 - 6X + 1$.

1. Montrer que $\langle .,.\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. (a) Montrer que (P_0, P_1, P_2) est une base orthogonale de E pour ce produit scalaire.
   (b) En déduire une base orthonormée de E pour ce produit scalaire.
3. Déterminer une base orthonormée de E pour ce produit scalaire, grâce au procédé d'orthonormalisation de Schmidt, en partant de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 5
Soit φ l'application définie sur $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$par :

$$\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, \forall (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \varphi\Big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\Big) = 3x_1y_1 + 3x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2y_1x_2$$

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.
2. Justifier que la famille $\Big((1,1),(0,2)\Big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. Orthonormaliser cette base pour le produit scalaire φ.
4. Orthonormaliser la base $\Big((1,1),(0,2)\Big)$ pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6
On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $(P,Q) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$.
Pour tout k de $[[0,n]]$, on note $L_k(X) = (X^k(1-X)^k)^{(k)}$ et $P_k = X^k(1-X)^k$.

1. Si $0 \leq i < j \leq n$, montrer que $\langle L_i, L_j\rangle = -\int_0^1 P_i^{(i+1)}(t)P_j^{(j-1)}(t)dt$.
2. Si $0 \leq i < j \leq n$, montrer que $\langle L_i, L_j\rangle = (-1)^{i+1}\int_0^1 P_i^{(2i+1)}(t)P_j^{(j-i-1)}(t)dt$.
3. En déduire que la famille $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est orthogonale.

Exercice 7
On note : $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X] \quad \langle P,Q\rangle = \sum\limits_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$.
On note pour tout entier k de $[[0,n]]$, $L_k = \dfrac{(-1)^{n-k}}{n!}\binom{n}{k}\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}(X-j)$.

1. Montrer que $\langle .,.\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer que pour tout entier k de $[[0,n]]$, L_k est l'unique polynôme de degré n tel que

$$\forall i \in [[0,n]],\quad L_k(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

3. Montrer que la famille $(L_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 8
Soit n un entier naturel non nul et a un réel fixé. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Si P et Q sont deux éléments de E, on définit :

$$\langle P,Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}\,\frac{Q^{(k)}(a)}{k!}$$

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. On note $\forall j \in [[0,n]]$, $P_j = (X-a)^j$
   (a) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base orthonormée de E.
   (b) Soit Q un polynôme de E. Déterminer les coordonnées du polynôme Q dans cette base.
3. On définit, pour tout entier naturel j compris entre 0 et n : $Q_j(X) = \sum\limits_{i=0}^{j}(X-a)^i$.
   Calculer $\langle Q_i, Q_j\rangle$ pour tout couple i et j d'entiers compris entre 0 et n.

Exercice 9
Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul, et on adopte les notations suivantes :
$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$: ensemble des matrices carrées d'ordre n, à coefficients réels.
$S_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices symétriques.
$A_n(\mathbb{R})$: le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices antisymétriques.

On définit l'application φ par : Pour toute matrice A et B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(A,B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$

1. Prouver que tr est surjective. Donner la dimension du noyau de tr.
2. (a) Prouver que φ définit un produit scalaire dont la norme associée, $\|.\|$, vérifie :
   $\forall A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\1\leqslant i\leqslant n}} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|^2 = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{i,j}^2$
   (b) Etablir que : $\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $|\,\mathrm{tr}(A)| \leq \sqrt{n}.\,\|A\|$.
3. Démontrer que $S_n(\mathbb{R})$ et $A_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces supplémentaires orthogonaux de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ pour φ.

Exercice 10
Des inégalités

1. Montrer que $\forall (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$.
   Pour quels vecteurs de $\mathbb{R}^n$, y-a-t il égalité?

2. Montrer que pour tout entier naturel non nul n : $\sum\limits_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leqslant \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$

Exercice 11
Soit E un espace euclidien et $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ une famille de n vecteurs unitaires telle que

$$\forall x \in E, \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2 = \|x\|^2$$

1. Montrer que les vecteurs e_i sont orthogonaux deux à deux.

2. Soit $u \in E$, on pose $y = u - \sum\limits_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle e_i$.

   Montrer que $\|y\|^2 = 0$ et en déduire que $u \in \text{Vect}(e_1, e_2, \cdots, e_n)$.
   En déduire que le sous-espace vectoriel engendré par la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est égal à E.

3. En déduire que la famille $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une base orthonormée de E.

Exercice 12
Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien de dimension n.
On note $(e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E.
Soit f un endomorphisme de E qui vérifie la propriété suivante:

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad \langle x, y \rangle = 0 \Longrightarrow \langle f(x), f(y) \rangle = 0$$

1. Montrer que pour i et j deux entiers de $[[1, n]]$ tels que $i \neq j$ les vecteurs $e_i - e_j$ et $e_i + e_j$ sont orthogonaux.

2. En déduire que les vecteurs $f(e_i)$ et $f(e_j)$ ont même norme que l'on notera α.

3. Montrer que $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \alpha \|x\|$.

Exercice 13
Endomorphisme adjoint
Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$ une base orthonormale de E.
Soit f un endomorphisme de E qui possède au moins une valeur propre λ réelle.
On note f^* l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est la transposée de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

1. (a) Vérifier que l'on a: $\forall (x, y) \in E \times E$, $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$.
   (b) Etablir que f^* est l'unique endomorphisme de E vérifiant:
   $$\forall (x, y) \in E \times E,\ \langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$$

2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $f = f^*$.

3. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f. Montrer que $F^{\perp}$ est stable par f^*.

4. (a) Montrer que λ est une valeur propre de f^*.
   (b) On considère un vecteur propre u de f^* associé à la valeur propre λ.
   Montrer que $(Vect(u))^{\perp}$ est un hyperplan de E et qu'il est stable par f.

Exercice 14
Endomorphisme adjoint
$E = \mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire canonique et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est sa base canonique.
Définition :
Soit f un endomorphisme de E et $A = Mat_{\mathcal{B}}(f)$. L'adjoint de f noté f^* est l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est ${}^tA$ (la transposée de A).

Pour la suite de l'exercice, on considère un endomorphisme f de E.

Préliminaire
Montrer qu'une droite vectorielle est stable par f si et seulement si elle est engendrée par un vecteur propre de f.
I. Généralités

1. (a) Montrer que f et f^* ont le même spectre.
   (b) Que peut-on dire de $(f^*)^*$?

2. Montrer que : $\forall x \in E, \forall y \in E,\ < f(x), y >=< x, f^*(y) >$

3. (a) Montrer que $Ker(f) = \big(Im(f^*)\big)^{\perp}$.
   (b) En déduire que f et f^* ont le même rang.

4. Soit F un sous-espace vectoriel de E.
   Montrer que : F est stable par $f \Leftrightarrow F^{\perp}$ est stable par f^*.

II. Etude d'un premier exemple

Soit f l'endomorphime de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $P = (X-3)^2(X-1)$ est un polynômes annulateur de f.

2. (a) Déterminer les valeurs propres et une base de chacun des sous-espaces propres de f.
   (b) f est-il diagonalisable ? f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

3. Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de f^*.

4. (a) Déterminer les droites vectorielles stables par f.
   (b) A l'aide de **I.4**, déterminer les plans vectoriels stables par f.
   (c) Déterminer enfin tous les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ qui sont stables par f.

Exercice 15
Endomorphisme antisymétrique
Soit $n \geqslant 2$ fixé. Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique noté $\langle x, y\rangle$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de E. Soit f une application de E vers E. On dit que f est antisymétrique lorsque : $\forall (x,y) \in E^2, \langle x, f(y)\rangle = -\langle f(x), y\rangle$.
Attention cette application n'est pas supposée linéaire à ce stade

1. Soit f une application antisymétrique.
   (a) Soient x et y deux vecteurs de E et λ un réel.
   Montrer que pour tout vecteur z de E, $\langle f(x+\lambda y), z\rangle = -\langle x+\lambda y, f(z)\rangle = \langle f(x)+\lambda f(y), z\rangle$.
   (b) En déduire que f est une application linéaire.
2. (a) soit u un endomorphisme de E. Montrer que
   u est antisymétrique $\Leftrightarrow \forall x \in E, \langle x, u(x)\rangle = 0$.
   (b) Soit u un endomorphisme de E. Montrer que
   u est antisymétrique $\Leftrightarrow$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est antisymétrique
3. Soit f une application antisymétrique.
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $Im(f)$ sont supplémentaires et orthogonaux dans E.
   (b) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.
   (c) Montrer que si λ est une valeur propre *réelle* de f, alors $\lambda = 0$.
   A quelle condition l'endomorphisme f est-il diagonalisable dans $\mathbb{R}$?
   (d) Montrer que f^2 est un endomorphisme symétrique.
   (e) On suppose que l'endomorphisme f est bijectif. Soit e un vecteur propre de f^2.
      i. Montrer que $F = \mathrm{Vect}\big(e, f(e)\big)$ est de dimension 2.
      ii. Montrer que F est stable par f.
      iii. En déduire que $F^{\perp}$ est stable par f.

Exercice 16
Polynômes de Tchebychev

On note $\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$, on définit $\varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

1. Montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ est convergente.
2. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
3. On définit une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relations suivantes :
$$P_0 = 1,\ P_1 = X \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$$
   (a) Calculer P_2, P_3 et P_4.
   (b) Justifier que, pour tout entier naturel non nul, P_n est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$, et déterminer son degré et son coefficient dominant.
   (c) i. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos((n+2)\theta) = 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta)$.
      ii. En déduire, par récurrence que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall \theta \in \mathbb{R},\ P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ est une base orthogonale de E muni du produit scalaire ci-dessus.
   Indication: *On pourra effectuer le changement de variable $t = \cos(\theta)$.*