

Informatique : programmation en langage Python

Notamment : **simulation des variables discrètes usuelles en Python** (loi uniforme discrète, loi binômiale, géométrique, de Poisson, générateur `rd.random()`).

Chapitre 7 - Variables à densité (suite et fin)

1. Lois usuelles

- Loi uniforme sur $[a, b]$: densité, fonction de répartition, espérance (*), variance. Stabilité par transformation affine : si X suit une loi uniforme et si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$, alors $Y = \alpha.X + \beta$ suit aussi une loi uniforme, que l'on peut préciser en déterminant $Y(\Omega)$.
- Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$: densité, fonction de répartition, espérance (*), variance. Attention paramètre inversé dans la simulation Scilab. Stabilité : si $\alpha > 0$ alors $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$ (savoir démontrer une implication *). Variante qui revient au même $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha) \Leftrightarrow \alpha X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ Loi d'un processus sans mémoire : comprendre.
- Loi normale
 - Rappel : intégrale de Gauss.
 - Loi normale centrée réduite : densité, fonction de répartition Φ , espérance, variance. Propriétés de Φ : $\Phi(0) = \frac{1}{2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ (sert tout le temps)
 - Loi normale de paramètres m et σ^2 : densité, fonction de répartition, espérance, variance.
 - Stabilité par transformation affine : si X suit une certaine loi normale, si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\beta \in \mathbb{R}$, alors $Y = \alpha.X + \beta$ suit aussi une loi normale. On déterminera ses paramètres en calculant $E(Y)$ et $V(Y)$.
 - Centrage-réduction : si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ alors $X^* = \frac{X-m}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
 - Table des valeurs de la fonction Φ : à savoir utiliser.
- Loi petit gamma
 - Rappels sur la fonction Gamma.
 - Densité, espérance (*), variance (*) : calculs rapides grâce à la fonction Gamma.
 - On remarque que $X \hookrightarrow \gamma(1) \Leftrightarrow X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.

• **Produit de convolution pour les variables à densité**

A utiliser pour trouver la loi de $X+Y$ où X et Y sont à densité et indépendantes.

Théorème

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles à densité **indépendantes** définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) de densités respectives f_X et f_Y .

On note $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)dt$

- **Versio1** : si la fonction h est définie, continue sur \mathbb{R} sauf éventuellement en un nombre fini de points alors h est une densité et $X+Y$ est une variable aléatoire à densité de densité h donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)dt$$

- **Versio 2**

Si f_X ou f_Y est bornée sur \mathbb{R} alors la fonction h est une densité et $X+Y$ est une variable aléatoire à densité de densité h donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)f_Y(t)dt$$

On regardera donc d'abord si l'une des deux densités est bornée **pour pouvoir appliquer la version 2**, et sinon à défaut on se ramène à la version 1.

Exercice à savoir refaire : Soient λ et μ des réels strictement positifs tels que $\lambda \neq \mu$.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur le même espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) suivant toutes les deux des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ .

On note $Z = X + Y$.

Justifier que Z est une variable à densité et déterminer une densité de Z

2. Stabilité pour la somme : loi gamma et loi normale

- (a) Si $X_1 \hookrightarrow \gamma(\nu_1)$, si $X_2 \hookrightarrow \gamma(\nu_2)$ (où $\nu_1 \in]0, +\infty[$ et $\nu_2 \in]0, +\infty[$) et si X_1 et X_2 sont des variables **indépendantes** alors $X_1 + X_2 \hookrightarrow \gamma(\nu_1 + \nu_2)$
- (b) Si $\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $X_k \hookrightarrow \gamma(\nu_k)$ et si les m variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_m sont **mutuellement indépendantes** alors $X_1 + X_2 + \dots + X_m \hookrightarrow \gamma(\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_m)$
- (c) Conséquence pour une somme de variables indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre 1.
- (d) Si $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$, si $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ et si X_1 et X_2 sont des variables indépendantes alors

$$X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$$

- (e) Si $\forall k \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $X_k \hookrightarrow \mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$ et si les r variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_r sont **mutuellement indépendantes**, alors

$$X_1 + X_2 + \dots + X_r \hookrightarrow \mathcal{N}(m_1 + \dots + m_r, \sigma_1^2 + \dots + \sigma_r^2)$$

3. Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev (début)

- (a) Inégalité de Markov.
 Démonstration guidée sous forme d'exercice (*) à savoir refaire :
 Soit X une variable aléatoire (à densité ou discrète), admettant une espérance, telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$.
 Soit a un réel strictement positif. On note A l'événement $A = [X \geq a]$ On note $\mathbb{1}_A$ la variable indicatrice de l'événement A .
- Rappeler la définition de la variable $\mathbb{1}_A$.
 - Calculer l'espérance de la variable $\mathbb{1}_A$.
 - Montrer que $a \times \mathbb{1}_A \leq X$. En déduire l'inégalité de Markov.
- (b) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (*).
 Preuve en appliquant Markov à $Y = (X - E(X))^2$.
- (c) Exercice d'application à savoir refaire
 Soit $\lambda \in]0, +\infty[$. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ .
 Montrer que $\forall \epsilon > 0, P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\lambda^2 \epsilon^2}$.
 En déduire que $P\left(X \geq \frac{3}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{4}$

Chapitre 8 - Algèbre bilinéaire I (début)

- Définition d'un produit scalaire.
- Produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^n . Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Quelques produits scalaires classiques sur $E = \mathcal{C}^0([a, b])$, sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sur $E = \mathbb{R}[X]$...
- Utilisation de la bilinéarité du produit scalaire.
- Vecteurs orthogonaux.
- Norme associée à un produit scalaire.
 - Normes associées aux produits scalaires canoniques.
 - Propriétés d'une norme : $\forall u \in E, \|u\| \geq 0, \forall u \in E, \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_E$, si u n'est pas le vecteur nul alors $\|u\| > 0, \forall u \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$.
 - $\forall (u, v) \in E^2, \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$ (*)
 - Théorème de Pythagore : u et v sont orthogonaux $\Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ (*)
 - Formule de polarité : $\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$ à savoir retrouver si besoin.
 - Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité** (*) : à savoir utiliser (nombreux exemples dans le cours)
 - Inégalité triangulaire, inégalité triangulaire généralisée.
- Orthogonalité
 - Familles orthogonales.
 - Th. de Pythagore généralisé : si la famille (u_1, \dots, u_p) est une famille orthogonale alors,

$$\|u_1 + u_2 + \dots + u_p\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \dots + \|u_{p-1}\|^2 + \|u_p\|^2$$
 - Orthogonalité et liberté**
 Si (u_1, \dots, u_p) est une famille orthogonale de vecteurs ne contenant pas le vecteur nul, alors (u_1, \dots, u_p) est une famille libre (*).
- Famille orthonormée.

(*) : preuve exigible