Barème : (cf rapport de jury) : Préliminaire 8%, Partie I 20%, Partie II 16%, Partie III 28%, Partie IV 28% (dont Python 9%).

Faire 60% du sujet donne la note de 20/20.

Préliminaire

1. (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction f_k définie sur $[0, +\infty[$ par : $f_k(t) = t^k e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$, et en $+\infty$ $f_k(t) = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), par critère d'équivalence (fonctinos positives), l'intégrale $\int_1^{+\infty} f_k(t) dt$ converge. Comme $\int_0^1 f_k(t) dt$ est bien définie, $\int_0^{+\infty} f_k(t) dt$ converge.

(b) D'après le cours, l'intégrale de Gauss vaut $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$.

Donc $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

On considère $A_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$. Posons $t = \frac{x}{\sqrt{2}}$. La fonction $t \mapsto \sqrt{2}.t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, bijective de $[0; +\infty[$ sur $[0; +\infty[$. Le CDV est autorisé et

$$A_0 = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Le calcul de A_1 est plus simple :

$$A_1 = \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-t^2} \right]_0^A = \frac{1}{2}$$

On considère enfin $A_2 = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt$. Soit $B > 0$ et $A_2^B = \int_0^B t^2 e^{-t^2} dt$. Posons

$$\begin{cases} u'(t) = t.e^{-t^2} \\ v(t) = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u(t) = -\frac{1}{2}.e^{-t^2} \\ v'(t) = 1 \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, B]$. Par IPP

$$A_2^B = \left[-\frac{1}{2} t.e^{-t^2} \right]_0^B + \frac{1}{2} \int_0^B e^{-t^2} dt = -\frac{1}{2} B.e^{-B^2} + \frac{1}{2} \int_0^B e^{-t^2} dt$$

d'où en passant à la limite quand $B \rightarrow +\infty$: $A_2 = \frac{1}{2}.A_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

Ainsi, $A_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $A_1 = \frac{1}{2}$ et $A_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$

2. La fonction $t \mapsto |e^{-t^2} \cos(xt)|$ est continue, positive, et dominée par f_0 ; ainsi $\int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t^2} dt$ converge absolument, donc converge ; de même $\int_0^{+\infty} t^2 \sin(xt)e^{-t^2} dt$ converge absolument (domination de la valeur absolue par f_2).

Partie I. Calcul d'une fonction auxiliaire

3. (a) Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 0 en 0, pour la fonction sin qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$:

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad |\sin(u) - \sin(0)| \leq M|u|$$

avec $M = \sup_{t \in [0, u]} |\sin'(t)| = \sup_{t \in [0, u]} |\cos(t)| \leq 1$, donc :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R} \quad |\sin(u)| \leq |u|}$$

(b) $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \cos(a - b) + \cos(a + b) = 2 \sin(a) \sin(b)$; pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, prenons $a = \frac{u + v}{2}$ et $b = \frac{u - v}{2}$, on a bien $a + b = u$ et $a - b = v$ d'où :

$$\boxed{\cos(u) - \cos(v) = 2 \sin\left(\frac{u + v}{2}\right) \sin\left(\frac{v - u}{2}\right)}$$

(c) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$;

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &= \left| \int_0^{+\infty} e^{-t^2} (\cos(2xt) - \cos(2yt)) dt \right| \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} |\cos(xt) - \cos(yt)| dt \\ &\quad \text{par inégalité triangulaire pour les intégrales absolument convergentes} \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} 2 |\sin((x + y)t)| |\sin((x - y)t)| dt \\ &\quad \text{par 3)b) et croissance de l'intégrale} \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2} 2 |(x - y)t| dt \\ &\quad \text{par 3)a), et absolue convergence de } \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt = A_1 \\ &\leq 2|x - y| \int_0^{+\infty} t e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{|F(x) - F(y)| \leq 2A_1|x - y|}$$

donc :

$$\boxed{\lim_{y \rightarrow x} F(y) = F(x)}$$

F est continue en x et ceci pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. (a) Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 en 0, pour la fonction sin qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$:

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad |\sin(u) - \sin(0) - \sin'(0)u| \leq M \frac{u^2}{2}$$

avec $M = \sup_{t \in [0, u]} |\sin''(t)| = \sup_{t \in [0, u]} |-\sin(t)| \leq 1$, donc :

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R} \quad |\sin(u) - u| \leq \frac{u^2}{2}}$$

(b) Soit $(x, h) \in \mathbb{R}^2$;

$$|F(x + h) - F(x) + 2hG(x)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-t^2} (\cos(2(x + h)t) - \cos(2xt) + 2ht \sin(2xt)) dt \right|$$

avec :

$$\begin{aligned} & \left| e^{-t^2} (\cos(2(x+h)t) - \cos(2xt) + 2ht \sin(2xt)) \right| \\ &= e^{-t^2} |\cos(2xt) \cos(2ht) - \sin(2xt) \sin(2ht) - \cos(2xt) + 2ht \sin(2xt)| \\ &= e^{-t^2} |\cos(2xt) (\cos(2ht) - 1) + \sin(2xt) (2ht - \sin(2ht))| \\ &\leq e^{-t^2} (|\cos(2xt) (\cos(2ht) - 1)| + |\sin(2xt) (2ht - \sin(2ht))|) \\ &\leq e^{-t^2} (|\cos(2xt)| (1 - \cos(2ht)) + |\sin(2xt) (2ht - \sin(2ht))|) \end{aligned}$$

Notons que

$$e^{-t^2} (|\cos(2xt)| (1 - \cos(2ht))) \leq 2|\cos(2xt)|e^{-t^2},$$

qui est le terme général d'une intégrale convergente d'après le préliminaire ; de même pour

$$e^{-t^2} |\sin(2xt) (2ht - \sin(2ht))| \leq e^{-t^2} |\sin(2xt)| \frac{(2ht)^2}{2}$$

(cette dernière intégrale convergeant par le même argument que la deuxième du 2)).

Ainsi $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} (|\cos(2xt)| (1 - \cos(2ht)) + |\sin(2xt) (2ht - \sin(2ht))|) dt$ converge comme somme d'intégrales convergentes, donc :

- $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} (\cos(2(x+h)t) - \cos(2xt) + 2ht \sin(2xt)) dt$ est absolument convergente ;
- l'inégalité triangulaire s'applique :

$$\boxed{|F(x+h) - F(x) + 2hG(x)| \leq \int_0^{+\infty} (|\cos(2xt)| (1 - \cos(2ht)) + |\sin(2xt) (2ht - \sin(2ht))|) dt}$$

(c) D'après les inégalités établies dans la question précédente,

$$e^{-t^2} |\sin(2xt) (2ht - \sin(2ht))| \leq e^{-t^2} |\sin(2xt)| \frac{(2ht)^2}{2} = 2e^{-t^2} |\sin(2xt)| h^2 t^2$$

et

$$e^{-t^2} |\cos(2xt)| (1 - \cos(2ht)) \leq 2e^{-t^2} \sin^2(ht) |\cos(2xt)| \leq 2e^{-t^2} h^2 t^2 |\cos(2xt)|$$

donc :

$$\boxed{|F(x+h) - F(x) + 2hG(x)| \leq 2h^2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} t^2 (|\sin(2xt)| + |\cos(2xt)|) dt}$$

Cette dernière intégrale converge de la même manière que la deuxième de la question 2), et ne dépend pas de h , ce qui justifie de remplacer sa valeur par une constante C :

$$\boxed{|F(x+h) - F(x) + 2hG(x)| \leq Ch^2}$$

5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. En divisant la relation précédente par $|h| > 0$:

$$\forall h \in \mathbb{R}^* \quad \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + 2G(x) \right| \leq C|h|$$

donc :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = -2G(x)$$

donc F est dérivable en x et $F'(x) = -2G(x)$.

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{F' = -2G}$$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$; $F(x) = -2 \int_0^{+\infty} te^{-t^2} \sin(2xt) dt$.

Intégration par parties sur le segment $[0, A]$ ($A \geq 0$), avec

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-t^2} & v(t) &= \sin(2xt) \\ u'(t) &= -2te^{-t^2} & v'(t) &= 2x \cos(2xt) \end{aligned}$$

les fonctions u et v étant bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int_0^A -2te^{-t^2} \sin(2xt) dt &= \left[\sin(2xt)e^{-t^2} \right]_0^A - 2x \int_0^A \cos(2xt)e^{-t^2} dt \\ &= \sin(2Ax)e^{-A^2} - 2x \int_0^A \cos(2xt)e^{-t^2} dt \end{aligned}$$

donc :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A -2te^{-t^2} \sin(2xt) dt = 0 - 2x \int_0^{+\infty} \cos(2xt)e^{-t^2} dt$$

donc :

$$\boxed{F'(x) = -2xF(x)}$$

(c) Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = F(x)e^{x^2}$.

H est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad H'(x) = F'(x)e^{x^2} + F(x)2xe^{x^2} = 0$$

Ainsi, H est constante donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad H(x) = H(0) = F(0) = A_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

par conséquent,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2}}$$

II. Fonction de Dirichlet

6. (a) • $\sin(\frac{u}{2}) = 0$ ssi $\frac{u}{2} = k\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$, ssi $u = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Donc $\sin(\frac{u}{2})$ ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, et φ_n est continue sur $\mathcal{D}$ comme quotient de fonctions continues avec un dénominateur non nul.

• En 0 : $\varphi_n(u) \sim \frac{(n + \frac{1}{2})u}{2\frac{u}{2}} \sim n + \frac{1}{2}$, donc :

$$\boxed{\varphi_n \text{ est prolongeable par continuité avec } \varphi_n(0) = n + \frac{1}{2}}$$

(b)

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{D}, \forall k \in \mathbb{Z}, \varphi_n(u + 2\pi) &= \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)(u + 2\pi)\right)}{2 \sin\left(\frac{u+2\pi}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u + (2n + 1)\pi\right)}{2 \sin\left(\frac{u}{2} + \pi\right)} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1} \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right)}{-2 \sin\left(\frac{u}{2}\right)} \text{ car } \sin(k\pi + x) = (-1)^k \sin(x) \\ &= \varphi_n(u) \end{aligned}$$

Ainsi φ_n est 2π -périodique, donc :

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{Z}, \lim_{x \rightarrow 2k\pi} \varphi_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \varphi_n(x) = n + \frac{1}{2}}$$

φ_n est bien prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$.

(c) φ_n est paire comme quotient de fonctions impaires.

7. (a) Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \sin(b) \cos(a)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \sin(b) \cos(a)$$

donc en soustrayant : $\boxed{\sin(a + b) - \sin(a - b) = 2 \cos(a) \sin(b)}$

(b) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété : $\mathcal{H}(n)$: " $\forall u \in \mathcal{D}, \sum_{k=1}^n \cos(ku) = \varphi_n(u) - \frac{1}{2}$ "

• **Initialisation** : si $n = 1$, pour tout $u \in \mathcal{D}$,

$$\varphi_1(u) - \frac{1}{2} = \frac{\sin\left(\left(1 + \frac{1}{2}\right)u\right) - \sin\left(\frac{u}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{u}{2}\right)} = \frac{2 \cos(u) \cdot \sin\left(\frac{u}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{u}{2}\right)} = \cos(u)$$

en prenant $a = u$ et $b = \frac{u}{2}$ dans la relation du 7.(a). Donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie.

• **Hérédité** : soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. Alors pour tout $u \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \cos(ku) &= \sum_{k=1}^n \cos(ku) + \cos((n+1)u) \\ &= \varphi_n(u) - \frac{1}{2} + \cos((n+1)u) \text{ par HR} \\ &= \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right)}{2 \sin\left(\frac{u}{2}\right)} + \cos((n+1)u) - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right) + 2 \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos((n+1)u)}{2 \sin\left(\frac{u}{2}\right)} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Or en prenant $a = (n+1)u$ et $b = \frac{u}{2}$ dans la relation de la question précédente, on obtient :

$$2 \sin\left(\frac{u}{2}\right) \cos((n+1)u) = \sin\left(\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right)u\right) - \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)u\right)$$

ce qui en simplifiant nous donne

$$\sum_{k=1}^{n+1} \cos(ku) = \frac{\sin\left(\left(n + 1 + \frac{1}{2}\right)u\right)}{2 \sin\left(\frac{u}{2}\right)} - \frac{1}{2} = \varphi_{n+1}(u) - \frac{1}{2}$$

donc $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

• **Conclusion** : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall u \in \mathcal{D}, \sum_{k=1}^n \cos(ku) = \varphi_n(u) - \frac{1}{2}}$

De plus, la fonction $u \mapsto \sum_{k=1}^n \cos(ku)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Comme φ_n est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}$ et que $\mathbb{R} \setminus \mathcal{D}$ n'est formé que de points isolés, on a bien

$$\forall u \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^n \cos(ku) = \varphi_n(u) - \frac{1}{2}$$

Autre rédaction possible : si $u = 2l\pi$ où $l \in \mathbb{Z}$, alors $\sum_{k=1}^n \cos(ku) = n$ et $\varphi(u) - \frac{1}{2} = n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = n$ donc la relation reste vraie si $u \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{D}$.

(c) $\int_0^{2\pi} \varphi_n(u) du = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(ku)\right) du = \pi + \sum_{k=1}^n \left[\frac{\sin(ku)}{k}\right]_0^{2\pi} = \pi + 0$

$$\boxed{\int_0^{2\pi} \varphi_n(u) du = \pi}$$

8. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\int_x^{x+T} \psi(u) du = \int_x^0 \psi(u) du + \int_0^T \psi(u) du + \int_T^{x+T} \psi(u) du$$

On pose $x = u - T$ dans la dernière intégrale. Comme $u \mapsto u - T$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, ce CDV est autorisé. On obtient alors $\int_T^{x+T} \psi(u) du = \int_0^x \psi(x+T) dx = \int_0^x \psi(x) dx$ par périodicité. D'où

$$\int_x^{x+T} \psi(u) du = \int_x^0 \psi(u) du + \int_0^T \psi(u) du + \int_0^x \psi(u) du = \int_0^T \psi(u) du$$

Partie III. Formule sommatoire de Poisson

9. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$k^2 f(x + 2k\pi) = k^2 \cdot \exp(-\theta \cdot (x + 2k\pi)^2) = \exp(2 \ln(k) - \theta(x + 2k\pi)^2);$$

or $-\theta(x + 2k\pi)^2 \sim_{k \rightarrow +\infty} -4\theta\pi^2 k^2$, et $\ln(k) = o_{k \rightarrow +\infty}(k^2)$, donc :

$$2 \ln(k) - \theta(x + 2k\pi)^2 \sim_{k \rightarrow +\infty} -4\theta\pi^2 k^2$$

donc :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} 2 \ln(k) - \theta(x + 2k\pi)^2 = -\infty$$

donc :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} k^2 f(x + 2k\pi) = 0 \text{ et par conséquent } f(x + 2k\pi) = o_{k \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Par critère de comparaison à une série de Riemann convergente, $\sum_{k \geq 1} f(x + 2k\pi)$ converge

et de même pour $\sum_{k \geq 1} f(x - 2k\pi)$.

(b) f étant paire,

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, H(-x) &= f(-x) + \sum_{k \geq 1} f(-x + 2k\pi) + \sum_{k \geq 1} f(-x - 2k\pi) \\ &= f(x) + \sum_{k \geq 1} f(x - 2k\pi) + \sum_{k \geq 1} f(x + 2k\pi) \\ &= H(x) \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{H \text{ est paire et donc sa dérivée est impaire}}$: en effet, en dérivant la relation ci-dessus : $\forall x \in \mathbb{R}, -H'(-x) = H'(x)$ donc $H'(-x) = -H'(x)$.

10. (a) Pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} H_N(x) \cos(nx) dx &= \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx + \sum_{k=1}^N \int_0^{2\pi} f(x + 2k\pi) \cos(nx) dx + \sum_{k=1}^N \int_0^{2\pi} f(x - 2k\pi) \cos(nx) dx \\ &= \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx + \sum_{k=1}^N \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} f(u) \cos(nu - n2k\pi) du + \sum_{k=1}^N \int_{-2k\pi}^{-(2k-1)\pi} f(u) \cos(nu + n2k\pi) du \\ &= \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx + \sum_{k=1}^N \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} f(u) \cos(nu) du + \sum_{k=1}^N \int_{-2k\pi}^{-(2k-1)\pi} f(u) \cos(nu) du \\ &\quad \text{car cos est } 2\pi\text{-périodique} \\ &= \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx + \int_{2\pi}^{(2N+1)\pi} f(u) \cos(nu) du + \int_{-2N\pi}^0 f(u) \cos(nu) du \\ &= \int_{-2N\pi}^{(2N+1)\pi} f(u) \cos(nu) du \end{aligned}$$

(b) • $\int_0^{+\infty} f(u) \cos(nu) du = \int_0^{+\infty} e^{-\theta u^2} \cos(nu) du = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos\left(\frac{nt}{\sqrt{\theta}}\right) \frac{dt}{\sqrt{\theta}}$;

cette intégrale est donc absolument convergente d'après le préliminaire ;

- $u \mapsto f(u) \cos(nu)$ est paire ;
- donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos(nu) du$ converge et vaut $2 \int_0^{+\infty} f(u) \cos(nu) du$;
- donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-2N\pi}^{(2N+1)\pi} f(u) \cos(nu) du = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) \cos(nu) du$
- et $\boxed{\lim_{N \rightarrow +\infty} H_N(x) \cos(nx) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(u) \cos(nu) du}$

(c) Pour tout $x \in [0, 2\pi]$ et $N \in \mathbb{N}^*$:

$$|H(x) - H_N(x)| = \left| \sum_{k=N+1}^{\infty} f(x + 2k\pi) + \sum_{k=N+1}^{\infty} f(x - 2k\pi) \right| \text{ (reste d'une série convergente)}$$

Or,

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 2\pi \\ \Rightarrow 2k\pi &\leq x + 2k\pi \leq (2k+1)\pi \\ \Rightarrow -\theta(2k+1)^2\pi^2 &\leq -\theta(x + 2k\pi)^2 \leq -\theta(2k\pi)^2 \\ \Rightarrow \exp(-\theta(2k+1)^2\pi^2) &\leq f(x + 2k\pi) \leq \exp(-\theta 4k^2\pi^2) \\ \Rightarrow 0 &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} f(x + 2k\pi) \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \exp(-\theta 4k^2\pi^2) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 0 &\leq x \leq 2\pi \\ \Rightarrow -2k\pi &\leq x - 2k\pi \leq -(2k-1)\pi \\ \Rightarrow (2k-1)^2\pi^2 &\leq (x - 2k\pi)^2 \leq (2k\pi)^2 \\ \Rightarrow \exp(-\theta(2k-1)^2\pi^2) &\leq f(x - 2k\pi) \leq \exp(-\theta(2k-1)^2\pi^2) \\ \Rightarrow \sum_{k=N+1}^{\infty} f(x - 2k\pi) &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \exp(-\theta(2k-1)^2\pi^2) \\ \Rightarrow \sum_{k=N+1}^{\infty} f(x - 2k\pi) &\leq \sum_{j=N}^{\infty} \exp(-\theta(2j+1)^2\pi^2) \\ \Rightarrow 0 &\leq \sum_{k=N+1}^{\infty} f(x - 2k\pi) \leq \sum_{j=N}^{\infty} \exp(-\theta 4j^2\pi^2) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{|H(x) - H_N(x)| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \exp(-\theta 4k^2\pi^2) + \sum_{j=N}^{\infty} \exp(-\theta 4j^2\pi^2) \leq 2 \sum_{k=N}^{\infty} \exp(-\theta 4k^2\pi^2)}$$

Remarque :

l'énoncé demande d'établir cette inégalité pour tout $x \in \mathbb{R}$; cette inégalité est fautive, car elle impliquerait que $|H(x) - H_N(x)|$ tende vers 0 indépendamment de x (convergence uniforme) et, en particulier, que pour toute suite de réels $(x_N)_{N \in \mathbb{N}^*}$, $\lim_{N \rightarrow \infty} |H(x_N) - H_N(x_N)| = 0$.

Or, pour $x_N = 2(N+1)\pi$, on a : $|H(x_N) - H_N(x_N)| \geq 1$ (*contre-exemple proposé par Romain Bouillaud*).

(d) D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^{2\pi} H(x) \cos(nx) dx - \int_0^{2\pi} H_N(x) \cos(nx) dx \right| \\ &\leq \int_0^{2\pi} |H(x) - H_N(x)| |\cos(nx)| dx \\ &\leq \int_0^{2\pi} 2 \left| \sum_{k=N}^{\infty} e^{-4\theta^2 k^2} \right| dx \leq 2 \left| \sum_{k=N}^{\infty} e^{-4\theta^2 k^2} \right| \times 2\pi \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \text{ comme reste d'une série convergente} \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\int_0^{2\pi} H(x) \cos(nx) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} H_N(x) \cos(nx) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(u) \cos(nu) du}$$

et enfin,

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{+\infty} f(u) \cos(nu) du &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-\theta u^2} \cos(nu) du \\ &= 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos\left(\frac{nt}{\sqrt{\theta}}\right) \frac{dt}{\sqrt{\theta}} = \frac{2}{\sqrt{\theta}} \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos\left(2\frac{nt}{2\sqrt{\theta}}\right) \frac{dt}{\sqrt{\theta}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\theta}} F\left(\frac{n}{2\sqrt{\theta}}\right) \quad (F \text{ étudiée en partie I}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{\theta}} \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\left(\frac{n}{2\sqrt{\theta}}\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} e^{-n^2/4\theta} \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\int_0^{2\pi} H(x) \cos(nx) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(u) \cos(nu) du = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} e^{-n^2/4\theta}}$$

$$11. a_n = \int_0^{2\pi} H(x) \cos(nx) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(u) \cos(nu) du = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} \exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right).$$

(a)

$$\begin{aligned} a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) &= a_0 + 2 \sum_{n=1}^N \cos(nx) \int_0^{2\pi} H(u) \cos(nu) du \\ &= a_0 + 2 \sum_{n=1}^N \int_0^{2\pi} H(u) \cos(nx) \cos(nu) du \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^N \int_0^{2\pi} H(u) (\cos(n(x+u)) + \cos(n(x-u))) du \\ &= a_0 + \int_0^{2\pi} H(u) \left(\sum_{n=1}^N \cos(n(x+u)) + \sum_{n=1}^N \cos(n(x-u)) \right) du \\ &= a_0 + \int_0^{2\pi} H(u) \left(\varphi_N(x+u) - \frac{1}{2} + \varphi_N(x-u) - \frac{1}{2} \right) du \quad \text{d'après 7)b)} \\ &= a_0 + \int_0^{2\pi} H(u) \varphi_N(x+u) du + \int_0^{2\pi} H(u) \varphi_N(x-u) du - \int_0^{2\pi} H(u) du \end{aligned}$$

or $\int_0^{2\pi} H(u) du = a_0$, donc :

$$\boxed{a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) = \int_0^{2\pi} H(u) \varphi_N(x+u) du + \int_0^{2\pi} H(u) \varphi_N(x-u) du}$$

(b) Transformons $\int_0^{2\pi} H(u) \varphi_N(x+u) du$ à l'aide du changement de variable affine $v = u + x$:

$$\int_0^{2\pi} H(u) \varphi_N(x+u) du = \int_x^{2\pi+x} H(v+x) \varphi_N(v) dv$$

Or H est 2π -périodique, car

$$\begin{aligned} H(x+2\pi) &= f(x+2\pi) + \sum_{k=1}^{\infty} f(x+2\pi+2k\pi) + \sum_{k=1}^{\infty} f(x+2\pi-2k\pi) \\ &= f(x+2\pi) + \sum_{j=2}^{\infty} f(x+2j\pi) + \sum_{i=0}^{\infty} f(x-2i\pi) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f(x+2k\pi) + f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} f(x-2k\pi) \\ &= H(x) \end{aligned}$$

φ_N est également 2π -périodique d'après le résultat établi en 6)b), donc la fonction $v \mapsto H(v+x)\varphi_N(v)$ est 2π -périodique, et ainsi, d'après la question 8),

$$\int_x^{2\pi+x} H(v+x)\varphi_N(v) dv = \int_0^{2\pi} H(v+x)\varphi_N(v) dv = \int_0^{2\pi} H(v+x) \frac{\sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)v\right)}{2\sin\left(\frac{v}{2}\right)} dv$$

et de même pour $\int_0^{2\pi} H(u)\varphi_N(u-x) du$.

Il s'ensuit :

$$\boxed{a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) = \int_0^{2\pi} \frac{H(v+x) + H(v-x)}{2\sin(v/2)} \times \sin\left(\left(N+\frac{1}{2}\right)v\right) dv}$$

- (c) • Sur $]0, 2\pi[$: H est de classe $\mathcal{C}^1$ (admis) donc continue ; $v \mapsto \sin(v/2)$ est continue et ne s'annule pas, donc K_x est continue par quotient.
 • En 0 : $v \mapsto H(x+v)$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, elle est notamment dérivable en 0 et y admet un DL d'ordre 1 :

$$\begin{aligned} H(v+x) &= H(x) + H'(x)v + o(v) \\ H(v-x) &= H(x) - H'(x)v + o(v) \end{aligned}$$

donc :

$$H(v+x) + H(v-x) - 2H(x) = o(v)$$

D'autre part, lorsque $v \rightarrow 0$, $2\sin\left(\frac{v}{2}\right) \sim 2\frac{v}{2} \sim v$, donc :

$$\boxed{\lim_{v \rightarrow 0} \frac{H(v+x) + H(v-x) - 2H(x)}{2\sin\left(\frac{v}{2}\right)} = 0 \text{ donc } K_x \text{ continue en } 0}$$

- En 2π :

$$\begin{aligned} K_x(2\pi - v) &= \frac{H(2\pi - v + x) + H(2\pi - v - x) - 2H(x)}{2\sin\left(\frac{2\pi - v}{2}\right)} \\ &= \frac{H(-v+x) + H(-v-x) - 2H(x)}{2\sin\left(\pi - \frac{v}{2}\right)} \quad \text{car } H \text{ } 2\pi\text{-périodique} \\ &= \frac{H(v-x) + H(v+x) - 2H(x)}{2\sin\left(\frac{v}{2}\right)} \quad \text{car } H \text{ est paire (9)b), et } \sin(\pi - t) = \sin(t) \\ &= K_x(v) \end{aligned}$$

donc :

$$\boxed{\lim_{v \rightarrow 2\pi^-} K_x(v) = \lim_{u \rightarrow 0^+} K_x(u) = 0 \text{ donc } K_x \text{ continue en } 2\pi}$$

(par le changement de variable $u = 2\pi - v$.)

(d) D'après 7)c),

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \pi = \int_0^{2\pi} \varphi_n(x) dx$$

donc :

$$\pi = \int_0^{2\pi} \varphi_N(x) dx = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)v\right)}{2 \sin\left(\frac{v}{2}\right)} dv$$

donc :

$$\begin{aligned} a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) - 2\pi H(x) &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{H(v+x) + H(v-x)}{2 \sin(v/2)} \right) \times \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)v\right) dv - 2H(x) \int_0^{2\pi} \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)v\right)}{2 \sin\left(\frac{v}{2}\right)} dv \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{H(v+x) + H(v-x) - 2H(x)}{2 \sin(v/2)} \right) \times \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)v\right) dv \\ &= \int_0^{2\pi} K_x(v) \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)v\right) dv \end{aligned}$$

12. (a)

$$\int_0^1 g(t) \sin(\lambda t) dt = \left[g(t) \frac{\sin(\lambda t)}{\lambda} \right]_0^1 - \frac{1}{\lambda} \int_0^1 g'(t) \sin(\lambda t) dt = g(1) \frac{\sin(\lambda)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \int_0^1 g'(t) \sin(\lambda t) dt$$

(IPP avec $u(t) = g(t)$ et $v'(t) = \sin(\lambda t)$ pour λ)

- $\left| g(1) \frac{\sin(\lambda)}{\lambda} \right| \leq \frac{|g(1)|}{\lambda}$ donc $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} g(1) \frac{\sin(\lambda)}{\lambda} = 0$;
- $\left| \frac{1}{\lambda} \int_0^1 g'(t) \sin(\lambda t) dt \right| \leq \frac{1}{\lambda} \int_0^1 |g'(t) \sin(\lambda t)| dt \leq \frac{1}{\lambda} \int_0^1 |g'(t)| dt = \frac{K}{\lambda}$,
donc $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^1 g'(t) \sin(\lambda t) dt = 0$.

Par somme,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^1 g(t) \sin(\lambda t) dt = 0$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right) \cos(nx) \right) &= \frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \right) \end{aligned}$$

Or, d'après 11)d),

$$a_0 + 2 \sum_{n=1}^N a_n \cos(nx) - 2\pi H(x) = \int_0^{2\pi} K_x(v) \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)v\right) dv$$

d'après 11)c), K_x est continue sur $[0, 2\pi]$;

d'après 12)a), $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} K_x(v) \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)v\right) dv = 0$

$$\text{donc } a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = 2\pi H(x)$$

donc :

$$\frac{1}{2\pi} \left(a_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \right) = H(x) = e^{-\theta x^2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\theta(x+2k\pi)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\theta(x-2k\pi)^2}$$

Partie IV. Une application probabiliste de la formule sommatoire de Poisson

13. Analyse de l'algorithme :

- l'instruction `rd.random()<= p` traduit l'obtention d'un "Pile", `rd.random()>p` l'obtention d'un "Face" ;
- la variable `i` commence à 1 et est incrémentée à chaque lancer de jeton : elle compte le nombre de lancers effectués depuis le début de la partie et jusqu'à l'arrêt du jeu ;
- la variable `j` est incrémentée à chaque lancer, mais réinitialisée à chaque changement de main : elle compte le nombre de lancers effectués lors du tour d'un joueur ;
- l'instruction `j>s` signifie que le joueur a fini son tour et doit passer la main ;
- la variable `s` représente donc la longueur maximale du tour d'un joueur (1, 3, 5 ...) ; elle démarre à 1 et augmente de 2 à chaque changement de joueur ;
- la variable `v` vaut 1 au début du tour de A, -1 au début du tour de B ; `v` garde sa valeur le jeu s'arrête avant que le tour soit fini, autrement dit si le joueur a gagné par "Pile".

Réponse aux questions :

- (a) `s=s+2 ; j=1`
- (b) `i` est le nombre de lancers effectués depuis le début de la partie et jusqu'à l'arrêt du jeu.
- (c) `v` est un indicateur permettant de savoir quel est le joueur en cours (et donc qui gagne).
- (d) Dans les initialisations ajouter : `k=1`.
Dans la boucle `while`, avant l'instruction `if j s ...`, ajouter :
`if v==1 then`
`k=k+1`
`end`
- (e) Méthode de Monte-Carlo : une valeur approchée est la fréquence de l'événement "A vainqueur" sur un grand nombre de simulations :
`N=10000 ;`
`f=0 ;`
`p=input('entrez probabilité de Pile') ;`
`for k=1:N`
`if jeu(p)==1 then`
`f=f+1`
`end`
`end`
`disp(f/N)`

14. (a) $H \cup K$ signifie qu'il y a un vainqueur (le jeu se termine) ; $\overline{H \cup K}$ signifie qu'il n'y a pas de vainqueur : le jeu continue indéfiniment, ce qui signifie que "Pile" ne sort jamais.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, F_n l'événement : "il n'y a eu que des Face lors des n premiers lancers".

$(F_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante d'événements, donc, par le théorème de limite monotone :

$$P_p(\overline{H \cup K}) = P_p\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_p(F_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1-p)^n = 0$$

donc :

$$\boxed{P_p(H \cup K) = 1}$$

$X + Y$ est le nombre total de lancers effectués jusqu'à l'arrêt du jeu (obtention du premier "Pile"). D'après ce qui précède, $X + Y$ a une valeur finie presque sûrement et :

$$\boxed{X + Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$$

- (b) Notons A_1 l'événement : le joueur A gagne dès le premier lancer (autrement dit, "Pile" sort au premier lancer). Alors

$$\begin{aligned} & A_1 \subset H \\ \text{donc } & P_p(A_1) \leq P_p(H) \leq 1 \\ \text{donc } & p \leq P_p(H) \leq 1 \end{aligned}$$

Par théorème d'encadrement,

$$\boxed{\lim_{p \rightarrow 1} P_p(H) = 1}$$

15. (a) i. Les séquences sont de longueur impaire : 1,3,5 ...
Ainsi, la séquence numéro j est de longueur $2j + 1$, avec les conventions suivantes :
- la première séquence porte le numéro 0, elle ne comporte que le premier lancer (effectués par le joueur A)
  - A joue les séquences de numéro j pair et B les séquences de numéro j impair

- ii. Lorsque la séquence numéro j commence, le nombre total de lancers déjà effectués est donc :

$$\sum_{k=0}^{j-1} (2k + 1) = 2 \sum_{k=0}^{j-1} k + j = j(j-1) + j = j^2$$

Par conséquent, $\boxed{\text{la séquence numéro } j \text{ commence au lancer numéro } j^2 + 1}$

- iii. Or, A effectue les séquences de numéro pair : $j = 2n$ donc :
- le premier lancer de la séquence est le lancer numéro $(2n)^2 + 1 = 4n^2 + 1$;
  - la séquence est de longueur $2j + 1 = 4n + 1$ donc le dernier lancer (s'il a lieu) porte le numéro $4n^2 + 4n + 1$

Ainsi, les valeurs de I sont incluses dans l'ensemble $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [4n^2 + 1, 4n^2 + 4n + 1]$.

- (b) Notons A_n l'événement : "A gagne lors de la séquence numéro $2n$ ".

$$A_n = F_1 \cap \dots \cap F_{4n^2} \cap \left(\bigcup_{k=1}^{4n^2} \underbrace{(F \dots F P)}_{k-1 \text{ fois}} \right)$$

donc, la réunion étant disjointe et les lancers indépendants,

$$\begin{aligned} P_p(A_n) &= (1-p)^{4n^2} \times \left(\sum_{k=1}^{4n^2} (1-p)^{k-1} p \right) \\ &= (1-p)^{4n^2} \times \frac{1 - (1-p)^{4n^2}}{1 - (1-p)} \\ &= (1-p)^{4n^2} - (1-p)^{4n^2+4n^2} \end{aligned}$$

H étant l'union disjointe des A_n ,

$$\boxed{P_p(H) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((1-p)^{4n^2} - (1-p)^{4n^2+4n^2} \right)}$$

J prend ses valeurs dans l'ensemble complémentaire de celles de I : les séries démarrent aux lancers $4n^2 + 4n + 1$ et terminent aux lancers $4(n+1)^2 - 1$:

$$\boxed{P_p(K) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((1-p)^{4n^2+4n+1} - (1-p)^{4(n+1)^2} \right)}$$

16. (a) D'après 12)b),

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right) \cos(nx) \right) = e^{-\theta x^2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\theta(x+2k\pi)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\theta(x-2k\pi)^2}$$

Appliquons cette égalité avec :

- $x = \pi$ donc $\cos(nx) = (-1)^n$
- $\theta = -\frac{1}{4 \ln(1-p)}$ donc $e^{-1/4\theta} = 1-p$ et $\exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right) = (1-p)^{n^2}$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1-p)^{n^2} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-p)^{n^2} \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx) \exp\left(-\frac{n^2}{4\theta}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} + \sqrt{\pi\theta} \left(e^{-\theta\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\theta(\pi+2k\pi)^2) + \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\theta(\pi-2k\pi)^2) \right) \\ &> \frac{1}{2} \text{ car sommes de séries à termes strictement positifs} \end{aligned}$$

- (b) $P_p(H) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((1-p)^{(2n)^2} - (1-p)^{(2n+1)^2} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (1-p)^{k^2} > \frac{1}{2}$

En reconnaissant des termes d'indices pairs/impairs.

$$\boxed{\text{Le jeu est inéquitable : } A \text{ a plus de chance de gagner que } B}$$

Sujet difficile !!! Il faut s'accrocher et aller chercher les points !