

Chapitre 7 - Variables à densité (fin)

Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

1. Inégalité de Markov.
2. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (*).
Preuve en appliquant Markov à $Y = (X - E(X))^2$.
3. Exercice d'application à savoir refaire
Soit $\lambda \in]0, +\infty[$. Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ .
Montrer que $\forall \epsilon > 0, P\left(\left|X - \frac{1}{\lambda}\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\lambda^2 \epsilon^2}$.
En déduire que $P\left(X \geq \frac{3}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{4}$

Chapitre 8 - Algèbre bilinéaire I (tout)

1. Définition d'un produit scalaire.
2. Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. Quelques produits scalaires classiques sur $E = \mathcal{C}^0([a, b])$, sur $E = \mathbb{R}_n[X]$, sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, sur $E = \mathbb{R}[X]$...
4. Utilisation de la bilinéarité du produit scalaire.
5. Vecteurs orthogonaux.
6. Norme associée à un produit scalaire.
 - (a) Normes associées aux produits scalaires canoniques.
 - (b) Propriétés d'une norme : $\forall u \in E, \|u\| \geq 0, \forall u \in E, \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0_E$, si u n'est pas le vecteur nul alors $\|u\| > 0, \forall u \in E, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$.
 - (c) $\forall (u, v) \in E^2, \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$ (*)
 - (d) Théorème de Pythagore : u et v sont orthogonaux $\Leftrightarrow \|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ (*)
 - (e) Formule de polarité : $\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(\|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2)$ à savoir retrouver si besoin.
 - (f) **Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité** (*) (**Preuve classique à connaître et bien comprendre**) : à savoir utiliser (nombreux exemples dans le cours)
 - (g) Inégalité triangulaire, inégalité triangulaire généralisée.
7. Orthogonalité
 - (a) Familles orthogonales.
 - (b) Th. de Pythagore généralisé : si la famille $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille orthogonale alors,

$$\|u_1 + u_2 + \dots + u_p\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2 + \dots + \|u_{p-1}\|^2 + \|u_p\|^2$$

(c) Orthogonalité et liberté

Si $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille orthogonale de vecteurs ne contenant pas le vecteur nul, alors $(u_1, \dots, u_p)$ est une famille libre (*).

8. Famille orthonormée.
9. Vecteur orthogonal à un sev, à un sev engendré. Sous-espaces orthogonaux. Deux sev orthogonaux sont en somme directe.
10. Espace euclidien : ev de dimension finie muni d'un produit scalaire.
11. Base orthonormée (B.O.N)
12. Méthode d'orthonormalisation de Schmidt : **à savoir appliquer pour deux ou trois vecteurs, la formule générale est hors-programme**. Connaître la méthode et comprendre l'idée !
13. Théorème de la base orthonormée incomplète.
14. Expressions dans une BON $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$:

(a) expression d'un vecteur $u \in E$: $u = \sum_{i=1}^n \langle u, e_i \rangle e_i$ donc $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \langle u, e_1 \rangle \\ \langle u, e_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle u, e_n \rangle \end{pmatrix}$ (*)

(b) expression du produit scalaire dans une BON
Soient $(x, y) \in E^2, X = Mat_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = Mat_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors

$$\langle x, y \rangle = {}^t X \cdot Y = \sum_{k=1}^n x_k y_k = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle$$

(c) expression de la norme dans une BON

Avec les mêmes notations, $\|x\| = \sqrt{{}^t X \cdot X} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2}$

(d) matrice d'un endomorphisme f dans une BON

$$A = Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \langle f(e_1), e_1 \rangle & \cdots & \cdots & \langle f(e_j), e_1 \rangle & \cdots & \langle f(e_n), e_1 \rangle \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \langle f(e_1), e_i \rangle & \cdots & \cdots & \langle f(e_j), e_i \rangle & \cdots & \langle f(e_n), e_i \rangle \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \langle f(e_1), e_n \rangle & \cdots & \cdots & \langle f(e_j), e_n \rangle & \cdots & \langle f(e_n), e_n \rangle \end{pmatrix}$$

(e) matrice de passage entre deux BON

15. Matrice orthogonale : matrice inversible telle que ${}^t P = P^{-1}$.
Une matrice de passage entre deux BON est une matrice orthogonale.

16. Une matrice est orthogonale ssi la famille de ses vecteurs colonnes est orthonormée.

17. Supplémentaire orthogonal.

- (a) Si F est un sev de E , définition de l'orthogonal de F , noté $F^\perp$.
- (b) $F \oplus F^\perp = E$: $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F .
- (c) $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.
- (d) $(F^\perp)^\perp = F$.
- (e) Si $F \subset G$ alors $G^\perp \subset F^\perp$ (*).
- (f) La concaténation d'une BON de F et d'une BON de $F^\perp$ donne une BON de E .

Petits exercices vus en cours à savoir refaire

1. Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique.
Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0\}$.
Démontrer très rapidement (en utilisant le produit scalaire) que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$, donner sa dimension, déterminer $F^\perp$ et une BON de $F^\perp$.
2. Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique,
donner une base du supplémentaire orthogonal de $H = Vect((1, 1, 2, 0), (1, 2, -1, 1))$.

(*) : **preuve exigible**