Corrigé du DS n° 4
lundi 9 décembre 2024

Exercice 1

Les variables aléatoires de cet exercice sont supposées définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{|x|}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

1. (a) La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto -\frac{x^2}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ ainsi que la fonction exponentielle. Finalement, par composition et produit de fonctions continues, $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.
Ensuite, $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0) et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = \frac{|-x|}{2}.e^{-\frac{(-x)^2}{2}} = \frac{|x|}{2}.e^{-\frac{(x)^2}{2}} = f(x)$$

donc $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est paire}}$

(b) Pour étudier la dérivabilité de f en 0, nous allons calculer les limites en 0^+ et 0^- du taux d'accroissement.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2} \text{ par continuité de exp en 0}$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{-x}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}}{x} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} = -\frac{1}{2}$$

Ces deux limites étant différentes, $\boxed{f \text{ n'est pas dérivable en } 0}$.

2. (a) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ par produit de fonctions usuelles et pour tout $x > 0$,

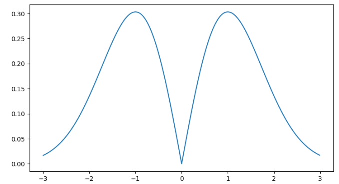
$$f'(x) = \frac{1}{2}.e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{2}.x^2.e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{2}.e^{-\frac{x^2}{2}}.(1-x^2)$$

Donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x^2$. On en déduit aisément le tableau de variations de f :

t	0		1		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}.e^{-\frac{1}{2}}$	$\searrow$	0

Par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(b) La courbe de f est la suivante, en exploitant la parité de f ainsi que la dérivée à droite en 0 (qui vaut $\frac{1}{2}$) :



(c) De façon évidente, f est positive sur $\mathbb{R}$ (1). De plus, on a déjà vu que f est continue sur $\mathbb{R}$ (2). On considère ensuite l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$. La fonction f étant paire,

$$I = 2.\int_0^{+\infty} \frac{x}{2}.e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \int_0^{+\infty} x.e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

Soit $A > 0$, alors

$$I_A = \int_0^A x.e^{-\frac{x^2}{2}}dx = [-e^{-\frac{x^2}{2}}]_0^1 = 1 - e^{-\frac{A^2}{2}}$$

Donc $\lim_{A\to+\infty} I_A = 1$. On en déduit que l'intégrale I converge et que $I = 1$ (3).

Bilan : d'après (1), (2), (3), $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est une densité de probabilité}}$

Dans la suite, on note X une variable aléatoire admettant f comme densité.

3. (a) X admet une espérance ssi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx$ est absolument convergente, c'est-à-dire si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x|.f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2}.e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

Par parité de $x \mapsto \frac{x^2}{2}.e^{-\frac{x^2}{2}}$, cela revient à dire que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{2}.e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ converge. Comme $g : x \mapsto \frac{x^2}{2}.e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, cette intégrale est impropre en $+\infty$ uniquement.

$$\frac{\frac{x^2}{2}.e^{-\frac{x^2}{2}}}{\frac{1}{x^2}} = \frac{x^4}{2}.e^{-\frac{x^2}{2}} \to_{x\to+\infty} 0$$

par croissances comparées, donc $\frac{x^2}{2}.e^{-\frac{x^2}{2}} = o_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}$. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), par négligeabilité $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{2}.e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ converge. Et par continuité de g sur $[0,1]$, $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{2}.e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ converge.

Bilan : $\boxed{X \text{ admet une espérance}}$

Autre méthode plus rapide : reconnaître que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2}.e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \frac{1}{2}.E(N^2)$ où N est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(\prime, \infty)$. La convergence de l'intégrale est alors immédiate.

(b) Comme f est paire, la fonction $x \mapsto x.f(x)$ est impaire. On en déduit immédiatement que

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)dx = 0$$

(c) Tout d'abord, $X(\Omega) = \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
- Premier cas : si $x \leq 0$, alors

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = -\frac{1}{2}.\int_{-\infty}^{x} t.e^{-\frac{t^2}{2}}dx$$

Soit $B < 0$. Alors

$$\int_B^x t.e^{-\frac{t^2}{2}}dx = [-e^{-\frac{x^2}{2}}]_B^x = -e^{-\frac{x^2}{2}} + e^{-\frac{B^2}{2}} \to_{B\to-\infty} -e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Ainsi,
$$F_X(x)=\frac{1}{2}.e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- Deuxième cas : si $x\geq 0$, alors

$$\begin{aligned}F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} f(t)dt+\int_{0}^{x} f(t)dt\\ &= F_X(0)+\int_0^x f(t)dt \text{ d'après le résultat du cas précédent}\\ &= \frac{1}{2}+[-\frac{1}{2}e^{-\frac{t^2}{2}}]_0^x\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}+\frac{1}{2}\\ &= 1-\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}\end{aligned}$$

Bilan : pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$F_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x\leq 0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x>0\end{cases}$$

(d) Tout d'abord, comme F_X est croissante et $F_X(0)=\frac{1}{2}$, pour avoir $F_X(x)=\frac{3}{4}$, x doit être positif.

$$\begin{aligned}F_X(x)=\frac{3}{4} &\Leftrightarrow 1-\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{3}{4}\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{4}\\ &\Leftrightarrow e^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow -\frac{x^2}{2}=\ln(\frac{1}{2})=-\ln(2)\\ &\Leftrightarrow x^2=2\ln(2)\Leftrightarrow x=\sqrt{2.\ln(2)}\end{aligned}$$

On obtient (informatiquement) que $x\simeq 1.2$ (à 10^{-1} près).
On peut donc dire que la probabilité que X soit inférieur à 1.2 est d'environ 75%.

4. On pose $T=|X|$. On note F_T la fonction de répartition de T.

(a) Tout d'abord, $T(\Omega)=\mathbb{R}_+$. On en déduit que pour tout $x<0$, $F_T(x)=0$. Supposons maintenant $x\geq 0$.

$$\begin{aligned}F_T(x) &= P(T\leq x)=P(|X|\leq x)\\ &= P(-x\leq X\leq x)=P(-x<X\leq x) \text{ car } X \text{ est à densité}\\ &= F_X(x)-F_X(-x)\\ &= 1-\frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}-\frac{1}{2}e^{-\frac{(-x)^2}{2}} \text{car } x\geq 0 \text{ et } -x\leq 0\\ &= 1-e^{-\frac{x^2}{2}}\end{aligned}$$

Bilan : T a pour fonction de répartition
$$F_T:x\mapsto\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ 1-e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ si } x\geq 0\end{cases}$$

Cette fonction F_T est nulle donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,0[$. De plus, par composition de fonctions usuelles, F_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$. La fonction F_T est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé éventuellement de 0 (1). De plus, $\lim_{x\to 0}1-e^{-\frac{x^2}{2}}=0$, donc F_T est continue en 0. On en déduit que F_T est continue sur $\mathbb{R}$ (2)

Bilan : d'après (1) et (2), $\boxed{T \text{ est une variable à densité}}$

(b) Pour trouver une densité de T, on dérivée F_T en tout point de $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ et on complète par une valeur arbitraire en 0. On obtient :
$$f_T:x\mapsto\begin{cases}0 \text{ si } x\leq 0\\ x.e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ si } x>0\end{cases}$$

(c) Sous réserve de convergence,
$$\begin{aligned}E(T) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t.f(t)dt\\ &= \int_0^{+\infty} t^2.e^{-\frac{t^2}{2}}dt\\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}.\int_{-\infty}^{+\infty} t^2.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{t^2}{2}}dt \text{ par parité}\\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}.E(N^2)\end{aligned}$$

où N est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Comme $E(N^2)=V(N)+E(N)^2=1$, on obtient bien le résultat souhaité.

Bilan : $\boxed{T \text{ admet une espérance et montrer que } \mathbb{E}(T)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

(d) Notons $Y=T^2$. Alors $Y(\Omega)=\mathbb{R}_+$. On en déduit que pour tout $x<0$, $F_Y(x)=0$. Pour tout $x\geq 0$,
$$\begin{aligned}F_Y(x) &= P(T\leq x)=P(T^2\leq x)\\ &= P(-\sqrt{x}\leq T\leq\sqrt{x})\\ &= P(-\sqrt{x}<T\leq\sqrt{x}) \text{ car } T \text{ est à densité}\\ &= F_T(\sqrt{x})-F_T(-\sqrt{x})\\ &= 1-e^{-\frac{x}{2}}\end{aligned}$$

Donc $T_2\hookrightarrow\mathcal{E}(\frac{1}{2})$. Par conséquent, $E(T^2)=2$

(e) En remarquant que $X^2=|X|^2=T^2$, on a alors $E(X^2)=2$. Ainsi, par la formule de Huygens,
$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=2$$
et
$$V(T)=E(T^2)-(E(T))^2=2-\frac{\pi}{2}$$

Bilan : $\boxed{V(X)=2 \text{ et } V(T)=2-\frac{\pi}{2}}$

Exercice 2

1. Soit $x\in]0;+\infty[$. La fonction $g:t\mapsto\frac{t}{1+x.e^t}$ est continue sur $[0;+\infty[$, donc l'intégrale est impropre en $+\infty$ uniquement.
$$\frac{\frac{t}{1+x.e^t}}{\frac{1}{t^2}}=\frac{t^3}{1+x.e^t}\sim_{t\to+\infty}\frac{1}{x}.t^3.e^{-t}\to_{t\to+\infty}0$$
donc $\frac{t}{1+x.e^t}=o_{t\to+\infty}(\frac{1}{t^2})$. Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ converge (Riemann, $\alpha=2>1$), par négligeabilité (fonctions positives), l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{t}{1+x.e^t}dt$ converge. Par continuité sur $[0,1]$ de la fonction g, finalement l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+x.e^t}dt$ converge.

On note alors $f:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ l'application définie sur $]0;+\infty[$ par
$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{t}{1+x.e^t}dt$$

2. (a) Prouver que : $\forall (x,y) \in]0;+\infty[^2$,

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &= |\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+x.e^t}dt - \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+y.e^t}dt| \\
&= |\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+x.e^t} - \frac{t}{1+y.e^t}dt| \text{(linéarité de l'intégrale)} \\
&= |\int_0^{+\infty} \frac{t.(y.e^t - x.e^t}{(1+x.e^t)(1+y.e^t)}dt| \text{(réduction au même dénominateur)} \\
&\leq \int_0^{+\infty} \frac{t.e^t.|y-x|}{(1+x.e^t)(1+y.e^t)}dt \text{(par inégalité triangulaire)}
\end{aligned}$$

On remarque que $(1+x.e^t)(1+y.e^t) \geq x.e^t.y.e^t = xy.e^{2t}$ et donc

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &\leq \int_0^{+\infty} \frac{t.e^t.|y-x|}{xy.e^{2t}}dt \\
&\leq \frac{|y-x|}{xy}.\int_0^{+\infty} t.e^{-t}dt
\end{aligned}$$

Comme $\int_0^{+\infty} t.e^{-t}dt = \Gamma(2) = 1$, on obtient le résultat souhaité.

Bilan : $\boxed{\forall (x,y) \in]0;+\infty[^2,\ |f(x)-f(y)| \leq \frac{1}{xy}.|x-y|}$

(b) Soit y un réel strictement positif fixé. Comme $\lim_{x\to y} \frac{1}{xy}.|x-y| = 0$, par encadrement on a $\lim_{x\to y} f(x) = f(y)$ donc f est continue en y. Ceci étant vrai pour tout $y>0$, on en déduit que $\boxed{f \text{ est continue sur }]0;+\infty[}$

3. (a) Pour tout $x \in]0;+\infty[$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} t.e^{-t}dt - f(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{t}{xe^t} - \frac{t}{1+xe^t}dt \text{ par linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{t}{xe^t.(1+xe^t)}dt
\end{aligned}$$

D'une part, pour tout $t \geq 0$, $\frac{t}{xe^t.(1+xe^t)}$, d'où en intégrant avec les bornes dans le bon ordre, $\int_0^{+\infty} \frac{t}{xe^t.(1+xe^t)}dt \geq 0$.
D'autre part, $xe^t.(1+xe^t) \geq x^2.e^{2t} \geq x^2.e^t$, donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} t.e^{-t}dt - f(x) &\leq \frac{1}{x^2}.\int_0^{+\infty} t.e^{-t}dt \\
&\leq \frac{1}{x^2}.\Gamma(2) = \frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

Si $c=1$ par exemple, on a bien :

$$0 \leq \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} t.e^{-t}dt - f(x) \leq \frac{c}{x^2}$$

(b) Cet encadrement peut se réécrire pour tout $x>0$:

$$0 \leq \frac{1}{x} - f(x) \leq \frac{c}{x^2} \Leftrightarrow 0 \leq 1 - x.f(x) \leq \frac{c}{x}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} \frac{c}{x} = 0$, par encadrement $\lim_{x\to+\infty} x.f(x) = 1$, donc $\boxed{f(x) \sim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}}$

4. (a) Soit $x \in]0;+\infty[$ et $L = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{e^{-t}+x}dt$.
La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{e^{-t}+x}dt$ est continue sur $[1;+\infty[$, donc l'intégrale L est impropre en $+\infty$ uniquement. Soit $A>0$.

$$\begin{aligned}
L_A &= \int_1^A \frac{e^{-t}}{e^{-t}+x}dt \\
&= [-\ln(e^{-t}+x]_1^A \\
&= \ln(x+e^{-1}) - \ln(e^{-A+x}) \\
\to_{A\to+\infty} \ln(x+e^{-1}) - \ln(x) = \ln(\tfrac{1+ex}{ex})
\end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{L = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{e^{-t}+x}dt \text{ converge et } L = \ln(\frac{1+ex}{ex})}$

(b) Par la relation de Chasles,

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t}{1+x.e^t}dt + \int_1^{+\infty} \frac{t}{1+x.e^t}dt$$

D'une part, $\int_0^1 \frac{t}{1+x.e^t}dt \geq 0$. D'autre part, comme $t \geq 1$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{t}{1+x.e^t}dt \geq \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x.e^t}dt = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{e^{-t}+x}dt = L$$

Donc $f(x) \geq L$.
Comme $\lim_{x\to0^+} \frac{1+e.x}{e.x} = +\infty$, on a $\lim_{x\to0^+} L = +\infty$. Par entrainement, $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.

Bilan : $\boxed{\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty}$

5. (a) Soit $x \in]0;+\infty[$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+x.e^t}dt$.
Conformément à l'énoncé, on pose $u = x.e^t$. La fonction $t \mapsto x.e^t$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante, bijective de $[0;+\infty[$ sur $[x;+\infty[$. Le changement de variables est donc autorisé.
Comme $t = \ln(\frac{u}{x}) = \ln(u) - \ln(x)$, on a $dt = \frac{1}{u}du$. Donc

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{\ln(u)-\ln(x)}{1+u}.\frac{1}{u}du \\
&= \int_x^{+\infty} \frac{\ln(u)}{1+u}.\frac{1}{u}du - \int_x^{+\infty} \frac{\ln(x)}{1+u}.\frac{1}{u}du \\
&= I(x) - \ln(x).\int_x^{+\infty} \frac{1}{(1+u).u}du
\end{aligned}$$

Notons que comme $I(x)$ est obtenu par changement de variables à partir de $f(x)$, l'intégrale $I(x)$ converge.

Soit $A \geq 1$.

$$\begin{aligned}
\int_x^A \frac{1}{(1+u).u}du &= \int_x^A \frac{1}{u}du - \int_x^A \frac{1}{1+u}du \\
&= \ln(A) - \ln(x) - \ln(A+1) + \ln(x+1) = \ln(\frac{A}{A+1}) - \ln(x) + \ln(x+1) \\
\to_{A\to+\infty} &\ -\ln(x) + \ln(x+1) = \ln(1+\frac{1}{x})
\end{aligned}$$

D'où enfin

$$\boxed{f(x) = -\ln(x).\ln(1+\tfrac{1}{x}) + I(x)}$$

où $I(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\ln(u)}{u.(1+u)}du$.

(b) Notons $g : u \mapsto \frac{\ln(u)}{u.(1+u)}$. Alors

$$I(x) = \int_1^{+\infty} g(u)du - \int_1^x g(u)du = C - G(x) + G(1)$$

où G est une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction g. Comme g est continue, G est de classe $\mathcal{C}^1$, donc I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ et admet pour dérivée

$$I'(x) = -G'(x) = -g(x) = -\frac{\ln(x)}{x.(1+x)}$$

Par ailleurs, la fonction $h : x \mapsto -\ln(x).\ln(1+\frac{1}{x}) = -\ln(x).(\ln(x+1) - \ln(x))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ par composition et produit de fonctions usuelles.

$$h'(x) = -\frac{1}{x}.(\ln(x+1) - \ln(x)) - \ln(x).(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}) = -\frac{1}{x}.\ln(1+\frac{1}{x}) + \ln(x).\frac{1}{x(x+1)}$$

Donc enfin f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; \infty[$ et pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = -\frac{\ln(x)}{x.(1+x)} - \frac{1}{x}.\ln(1+\frac{1}{x}) + \ln(x).\frac{1}{x(x+1)} = -\frac{1}{x}.\ln(1+\frac{1}{x})$$

6. La dérivée de f est négative sur $]0; +\infty[$, donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]0; +\infty[}$

7. (a) La fonction f est continue, strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. La fonction f est donc bijective de $]0; +\infty[$ sur $]0; +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\frac{1}{n} \in]0; +\infty[$, il existe un unique $x_n \in]0; +\infty[$, tel que $f(x_n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + x_n.e^t} dt = \frac{1}{n}$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(x_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} = f(x_n)$. La fonction f étant strictement décroissante, on a nécessairement $x_{n+1} \geq x_n$. Par conséquent $\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$

Supposons que la suite (x_n) est majorée. Elle converge alors vers un réel $L > 0$: $\lim_{n\to+\infty} x_n = L$. Par continuité de la fonction f sur $]0; +\infty[$, on a alors $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(L) > 0$. Absurde car $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Donc la suite (x_n) n'est pas majorée. Etant croissante, elle tend vers $+\infty$.

On a vu à la question 3.(b) que $f(x) \sim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$. Comme $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$, on a alors $f(x_n) \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{x_n}$. Mais $f(x_n) = \frac{1}{n}$. Donc $\frac{1}{x_n} \sim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$ et $x_n \sim_{n\to+\infty} n$.

<u>Bilan :</u> $\boxed{x_n \sim_{n\to+\infty} n}$

Problème : greffe de rosiers

Préliminaire

1. D'après la formule de Pascal,

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } a+1 \leq b, \quad \binom{b}{a} + \binom{b}{a+1} = \binom{b+1}{a+1}$$

On peut le prouver en passant par les factorielles.

2. Soit $a \in \mathbb{N}$. On en déduit que pour tout $k \geq a$,

$$\binom{k}{a} = \binom{k+1}{a+1} - \binom{k}{a+1}$$

D'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=a}^{m} \binom{k}{a} &= \sum_{k=a}^{m} \binom{k+1}{a+1} - \binom{k}{a+1} \\ &= \binom{m+1}{a+1} - \binom{a}{a+1} \text{ par télescopage} \\ &= \binom{m+1}{a+1} \text{ car } \binom{a}{a+1} = 0 \end{aligned}$$

Se prouve aussi par récurrence, mais plus naturel avec cette méthode ici étant donné la question précédente !

Partie I : loi des variables G_R et T_R

3. Soit $i \in [[1, R]]$ fixé.
<u>Epreuve $\mathcal{E}$:</u> on greffe le rosier numéro i.
<u>Succès :</u> la greffe prend, de probabilité p.
La variable X_i est égale au temps d'attente du 1er succès quand on répète l'épreuve $\mathcal{E}$ de façon identique et indépendante. Donc $\boxed{X_i \hookrightarrow \mathcal{G}(p)}$

On en déduit que $\boxed{E(X_i) = \frac{1}{p}}$ et $\boxed{V(X_i) = \frac{1-p}{p^2}}$

4. (a) G_R est égal au nombre de greffes total pour que tous les rosiers aient pris. C'est donc égal au nombre de greffes nécessaires pour le rosier numéro 1 (égal à X_1), plus le nombre de greffes nécessaires pour le rosier numéro 2 (égal à X_2), etc...

On en déduit bien que $\boxed{G_R = \sum_{i=1}^{R} X_i}$

(b) Par linéarité de l'espérance,

$$E(G_R) = \sum_{i=1}^{R} E(X_i) = \sum_{i=1}^{R} \frac{1}{p} = \frac{R}{p}$$

De plus, comme les variables X_i sont mutuellement indépendantes,

$$V(\sum_{i=1}^{R} X_i) = \sum_{i=1}^{R} V(X_i) = R.\frac{1-p}{p^2}$$

5. $G_2 = X_1 + X_2$. On a $G_2(\Omega) = [[2; +\infty[[$. Pour tout $k \in [[2; +\infty[[$,

$$\begin{aligned} P(G_2 = k) &= P(X_1 + X_2 = k) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} P([X_1 = i] \cap [X_2 = k-i]) \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} P([X_1 = i]).P([X_2 = k-i]) \text{ par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2 \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} p.q^{i-1}.p.q^{k-i-1} \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} p^2.q^{k-2} \\ &= (k-1).p^2 q^{k-2} \end{aligned}$$

6. $G_R(\Omega) = [[R; +\infty[[$.

Notons, pour tout $R \in \mathbb{N}^*$, la propriété

$$\mathcal{H}(R) : \forall k \in G_R(\Omega), \quad P(G_R = k) = \binom{k-1}{R-1}.p^R.(1-p)^{k-R}$$

- Initialisation : si $R=1$, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $P(G_R=k)=p.q^{k-1}$ et $\binom{k-1}{0}.p^1.(1-p)^{k-1}=p.q^{k-1}$ donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie.
- Hérédité : soit $R\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}(R)$ est vraie. Soit $k\in[[R+1;+\infty[[$.

$$\begin{array}{rcl} P(G_{R+1}=k) & = & P(G_R+X_{R+1}=k) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=R}^{k-1} P([G_R=i]\cap[X_{R+1}=k-i]) \end{array}$$

car $G_R(\Omega)=[[R;+\infty[[$ et $X_{R+1}(\Omega)=[[1;+\infty[[$.
De plus, par coalition les variables $G_R=\sum_{i=1}^R X_i$ et X_{R+1} sont indépendantes.

D'où :

$$\begin{array}{rcl} P(G_{R+1}=k) & = & \displaystyle\sum_{i=R}^{k-1} P([G_R=i]).P([X_{R+1}=k-i]) \\ & = & \displaystyle\sum_{i=R}^{k-1} \binom{i-1}{R-1}.p^R.q^{i-R}.p.q^{k-i-1} \\ & = & \displaystyle\sum_{i=R}^{k-1} \binom{i-1}{R-1}.p^{R+1}.q^{k-R-1} \\ & = & p^{R+1}.q^{k-R-1}.\displaystyle\sum_{j=R-1}^{k-2} \binom{j}{R-1} \\ & = & p^{R+1}.q^{k-R-1}\dbinom{k-1}{R} \end{array}$$

donc $\mathcal{H}(R+1)$ est vraie.
- Conclusion : $\boxed{\forall k\in G_R(\Omega),\quad P(G_R=k)=\binom{k-1}{R-1}.p^R.(1-p)^{k-R}}$

7. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcl} P(T_R\leq n) & = & P(Max(X_1,\cdots,X_R)\leq n) \\ & = & P([X_1\leq n]\cap\cdots\cap[X_R\leq n]) \\ & = & (P(X_1\leq n))^R \end{array}$$

car toutes les variables suivent la même loi. De plus, de façon classique, comme $X_1\hookrightarrow\mathcal{G}(p)$, $P(X_1>n)=q^n$, donc $P(X_1\leq n)=1-q^n$.

Bilan : $\boxed{P(T_R\leq n)=(1-q^n)^R}$

(b) On remarque que $T_R(\Omega)=\mathbb{N}^*$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$P(T_R=n)=P(T_R\leq n)-P(T_R\leq n-1)$$

Bilan : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad P(T_R=n)=(1-q^n)^R-(1-q^{n-1})^R}$

Partie II : étude de l'espérance de T_R

8. $\forall N\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{n=1}^{N+1} n.P(T_R=n) & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{N+1} n.(P(T_R>n-1)-P(T_R>n)) \\ & = & \displaystyle\sum_{n=1}^{N+1} n.(P(T_R>n-1)-\sum_{n=1}^{N+1} n.P(T_R>n) \\ & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{N}(k+1).(P(T_R>k)-\sum_{n=1}^{N+1} n.P(T_R>n) \\ & = & \displaystyle\sum_{n=0}^{N} n.(P(T_R>n)+\sum_{n=0}^{N} P(T_R>k)-\sum_{n=1}^{N+1} n.P(T_R>n) \\ & = & -(N+1).P(T_R>N+1)+\displaystyle\sum_{n=0}^{N} P(T_R>k) \end{array}$$

Bilan : $\boxed{\sum_{n=0}^N P(T_R>n)=\sum_{n=1}^{N+1} n.P(T_R=n)+(N+1).P(T_R>N+1)}$

9. D'après le I.7.a),

$$P(T_R>n)=1-(1-(1-p)^n)^R=-((1-q^n)^R-1)$$

On sait que $(1+u)^R-1\sim_{u\to 0} R.u$. Comme $\lim_{n\to+\infty} q^n=0$, on a $(1-q^n)^R-1\sim_{n\to+\infty}-R.q^n$, donc $\boxed{P(T_R>n)\sim_{n\to+\infty} R.q^n}$

10. On sait que $\sum_{n=1}^{N+1} n.P(T_R=n)=\sum_{n=0}^{N} P(T_R>n)-(N+1).P(T_R>N+1)$

Comme la série $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ converge (série géométrique avec $0<q<1$), par critère d'équivalence (termes positifs), la série $\sum_{n\geq 0} P(T_R>n)$ est convergente.
On peut dire aussi que $(N+1).P(T_R>N+1)\sim_{N\to+\infty} N.R.q^{N+1}\to_{N\to+\infty} 0$ par croissance comparées. Finalement, la série $\sum_{n\geq 1} n.P(T_R=n)$ converge donc $E(T_R)$ existe et

$$E(T_R)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N+1} n.P(T_R=n)=\sum_{n=0}^{+\infty} P(T_R>n)$$

Bilan : $\boxed{E(T_R)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(1-(1-q^n)^R)}$

11. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=1-(1-q^x)^R$.

(a) Soit $(x,y)\in\mathbb{R}_+^2$, avec $x\leq y$. Alors $x\ln(q)\geq y\ln(q)$ car $\ln(q)<0$. D'où $e^{x\ln(q)}\geq e^{y\ln(q)}\Leftrightarrow q^x\geq q^y$. Puis $(1-q^x)\leq(1-q^y)$, $(1-q^x)^R\leq(1-q^y)^R$ et enfin $f(x)\geq f(y)$.

Bilan : $\boxed{f \text{ est décroissante sur } [0;+\infty[}$

(b) Soit $x\in\mathbb{R}_+$.

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{k=0}^{R-1} q^x.(1-q^x)^k & = & q^x.\displaystyle\sum_{k=0}^{R-1}.(1-q^x)^k \\ & = & q^x.\dfrac{1-(1-q^x)^R}{q^x} \text{ avec } q^x\neq 0 \\ & = & 1-(1-q^x)^R=f(x) \end{array}$$

Bilan : $\boxed{\forall x\in[0;+\infty[,\ f(x)=\sum_{k=0}^{R-1} q^x.(1-q^x)^k}$

(c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $I_k = \int_0^{+\infty} q^x.(1-q^x)^k dx$.
La fonction $x \mapsto q^x.(1-q^x)^k$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc I_k est impropre en $+\infty$.

- Posons $u = q^x = \exp(x\ln(q))$.
- La fonction $x \mapsto \exp(x\ln(q))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, strictement décroissante et bijective de $[0;+\infty[$ sur $]0,1]$.
- Bornes : $\left\{ \begin{array}{l} x=+\infty \\ x=0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u=0 \\ u=1 \end{array} \right.$
- $du = \ln(q).\exp(x\ln(q))dx = \ln(q).q^x.dx$
- $q^x.(1-q^x)^k dx = \frac{1}{\ln(q)}.(1-q^x)^k.\ln(q).q^x dx = \frac{1}{\ln(q)}.(1-u)^k du$.

Par CDV, l'intégrale I_k est de même nature que

$$\int_1^0 \frac{1}{\ln(q)}.(1-u)^k du = -\frac{1}{\ln(q)}.\int_0^1 (1-u)^k du$$

Cette dernière intégrale n'est pas impropre. Donc l'intégrale I_k est convergente et

$$I_k = -\frac{1}{\ln(q)}.[-\frac{(1-u)^{k+1}}{k+1}]_0^1 = -\frac{1}{(k+1)\ln(q)}$$

Bilan : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ I_k = -\frac{1}{(k+1)\ln(q)}}$

(d) $\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{k=0}^{R-1} I_k$ par linéarité. Donc $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente car somme d'intégrales convergentes et

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} f(x)dx &= -\sum_{k=0}^{R-1} \frac{1}{(k+1)\ln(q)} \\ &= -\frac{1}{\ln(q)}.\sum_{j=1}^{R} \frac{1}{j} \text{ en posant } \ j=k+1 \end{aligned}$$

12. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la fonction f est décroissante sur $[n,n+1]$, pour tout $x \in [n,n+1]$ on a

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$

D'où en intégrant (bornes bon sens) :

$$\begin{aligned} &\int_n^{n+1} f(n+1)dx \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq \int_n^{n+1} f(n+1)dx \\ \Rightarrow\ & f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n+1) \text{ on intègre des constantes} \\ \Rightarrow\ & 1-(1-q^{n+1})^R \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq 1-(1-q^n)^R \\ \Rightarrow\ & P(T_R > n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq P(T_R > n) \end{aligned}$$

(b) En sommant dans la relation précédente, on obtient :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(T_R > n+1) \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\int_n^{n+1} f(x)dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(T_R > n) \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} P(T_R > n+1) \leq \int_0^{+\infty} f(x)dx \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(T_R > n)$$

Or on a déjà vu que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(T_R > n) = E(T_R)$.
On a donc aussi $\sum_{n=0}^{+\infty} P(T_R > n+1) = E(T_R) - P(T_R > 0) = E(T_R) - 1$.
On a également $\int_0^{+\infty} f(x)dx = -\frac{1}{\ln(q)}.\sum_{j=1}^{R}\frac{1}{j}$. Donc

$$E(T_R) - 1 \leq -\frac{1}{\ln(q)}.\sum_{j=1}^{R}\frac{1}{j} \leq E(T_R)$$

et donc en retournant cette relation :

$$\boxed{-\frac{1}{\ln(q)}.\sum_{j=1}^{R}\frac{1}{j} \leq E(T_R) \leq -\frac{1}{\ln(q)}.\sum_{j=1}^{R}\frac{1}{j} + 1}$$

13. Rappel : $\sum_{j=1}^{R}\frac{1}{j} \sim_{R\to+\infty} \ln(R)$.
On a alors

$$-\frac{1}{\ln(q)}.\frac{\sum_{j=1}^{R}\frac{1}{j}}{\ln(R)} \leq \frac{E(T_R)}{\ln(R)} \leq -\frac{1}{\ln(q)}.\frac{\sum_{j=1}^{R}\frac{1}{j}}{\ln(R)} + \frac{1}{\ln(R)}$$

et par encadrement, $\lim_{R\to+\infty} \frac{E(T_R)}{\ln(R)} = -\frac{1}{\ln(q)}$, donc $\boxed{E(T_R) \sim_{R\to+\infty} -\frac{\ln(R)}{\ln(q)}}$

Partie III : évolution du processus sur plusieurs semaines

On considère la suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $Y_0 = 0$ et où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n est la variable aléatoire égale au nombre de rosiers dont la greffe a déjà pris à l'issue de la n-ième semaine.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Z_{n+1} = Y_{n+1} - Y_n$.

14. Z_{n+1} représente le nombre de rosiers pour lesquels la greffe a pris exactement à la semaine $n+1$.

15.
- Epreuve $\mathcal{E}$: on greffe un rosier la 1ère semaine
- Succès : la greffe prend, de probabilité p.
- La variable Y_1 est égale au nombre de succès quand on réalise R fois l'épreuve $\mathcal{E}$ dans des conditions identiques et indépendantes. Donc $\boxed{Y_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(R,p)}$

D'après le cours, $\boxed{E(Y_1) = Rp}$ et $\boxed{V(Y_1) = Rpq}$

16. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m \in [[0,R]]$.

- 1er cas : supposons que $m \neq R$.
Sachant que $[Y_n = m]$ est réalisé, il y a m rosiers pour lesquels la greffe a déjà pris à la n-ème semaine. Il ne reste donc plus que $R-m$ rosiers à greffer. Comme Z_{n+1} compte alors le nombre de rosiers parmis ces $R-m$ rosiers pour lesquels la greffe prend à la semaine $n+1$, comme dans la question précédente, on a
$$Z_{n+1} \hookrightarrow_{/[Y_n=m]} \mathcal{B}(R-m,p)$$
On en déduit l'espérance conditionnelle $\boxed{E(Z_{n+1}/[Y_n = m]) = (R-m)p}$
- 2ème cas : supposons que $m = R$.
Sachant que $[Y_n = R]$ est réalisé, la greffe a déjà pris pour tous les rosiers à la n-ème semaine, il ne reste donc aucun rosier à greffer. Donc, sachant que $[Y_n = R]$, on a $Z_{n+1} = 0$. Ainsi $E(Z_{n+1}/[Y_n = R]) = 0$. Remarquons que la formule ci-dessus reste vraie !

17. D'après la formule de l'espérance totale (valable car somme finie) :

$$\begin{aligned} E(Z_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{R} P(Y_n = m).E(Z_{n+1}/[Y_n = m]) \\ &= \sum_{k=0}^{R} (R-m).p.P(Y_n = m) \\ &= Rp.\sum_{k=0}^{R} P(Y_n = m) - p.\sum_{k=0}^{R} mP(Y_n = m) \\ &= Rp - pE(Y_n) \end{aligned}$$

Comme $Z_{n+1} = Y_{n+1} - Y_n$, on a alors

$$E(Y_{n+1} - Y_n) = Rp - pE(Y_n) \Rightarrow E(Y_{n+1}) = (1-p)E(Y_n) + Rp$$

On reconnait une suite arithmético-géométrique !
Equation caractéristique : $c = (1-p)c + Rp \Leftrightarrow pc = Rp \Leftrightarrow c = R$.
Puis pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(Y_{n+1}) - c = (1-p)(E(Y_n) - c)$. Donc la suite $(E(Y_n) - c)$ est géométrique et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(Y_n) - c = (1-p)^{n-1}.(E(Y_1) - c)$ et enfin :
Bilan : $\boxed{E(Y_n) = R + q^{n-1}.(Rp - R) = R(1 - q^n)}$

18.
```
import numpy.random as rd
p=float(input("Entrer p :"))
R=int(input("Entrer R :"))
Y1=rd.binomial(R,p)
Z2=rd.binomial(R-Y1,p)
Y2=Y1+Z2
print(Y1,Z2,Y2)
```

19. (a) $Y_2(\Omega) = [[0, R]]$. On remarque que pour tout $k \in [[0, R]]$,

$$[Y_2 = k] = \bigcup_{m=0}^{k} [Y_1 = m] \cap [Z_2 = k - m]$$

Les événements étant incompatibles, on en déduit que

$$\begin{aligned} P(Y_2 = k) &= \sum_{m=0}^{k} P(Y_1 = m).P_{[Y_1=m}(Z_2 = k - m) \\ &= \sum_{m=0}^{k} \binom{R}{m} p^m q^{R-m}.\binom{R-m}{k-m} p^{k-m} q^{R-k} \\ &= \sum_{m=0}^{k} \binom{R}{m}.\binom{R-m}{k-m} p^k.q^{2R-m-k} \end{aligned}$$

(b) On remarque par un calcul classique sur les coefficients binômiaux que :

$$\begin{aligned} \binom{R}{m}.\binom{R-m}{k-m} &= \frac{R!}{m!(R-m)!}.\frac{(R-m)!}{(k-m)!.(R-k)!} = \frac{R!}{m!(k-m)!(R-k)!} \\ &= \frac{k!}{m!(k-m)!}.\frac{R!}{k!.(R-k)!} = \binom{k}{m}.\binom{R}{k} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} P(Y_2 = k) &= \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m}.\binom{R}{k} p^k.q^{2R-m-k} \\ &= \binom{R}{k}.p^k.q^{2R-2k}.\sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m}.q^{k-m} \\ &= \binom{R}{k}.p^k.q^{2R-2k}.(1+q)^k (\text{binôme}) \\ &= \binom{R}{k}.(p+pq)^k.(q^2)^{R-k} \end{aligned}$$

et on remarque que $p + pq = (1-q) + (1-q).q = 1 - q^2$. On reconnait donc bien une loi binômiale et $Y_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(1-q^2, R)$

Bilan : $\boxed{Y_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(1-q^2, R)}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La probabilité qu'aucune greffe ne fonctionne sur un rosier lors de n greffes successives est de q^n. En passant au complémentaire, la probabilité que, pour un rosier donné, au moins une greffe réussisse lors des n premières greffes successives est de $1 - q^n$. On reconnait alors que $\boxed{Y_n \hookrightarrow \mathcal{B}(R, 1-q^n)}$
Ainsi $\boxed{E(Y_n) = R.(1 - q^n)}$