Exercices Chap. 8 : ALGEBRE BILINÉAIRE I

Exercice 1

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$.

On reconnait que $I_k = \Gamma(k+1)$ avec $k+1>0$.

D'après le cours, cette intégrale I_k converge et $I_k = k!$

2. Soit $(P,Q) \in E^2$. Alors $\deg(PQ) \leq 2n$ et on peut noter : $PQ = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ où $(a_0, \dots, a_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$.

$<P,Q> = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{2n} a_k t^k e^{-t} dt = \sum_{k=0}^{2n} a_k \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$.

$<P,Q>$ est une combinaison linéaire d'intégrales convergentes, donc $<P,Q>$ est bien défini.

3. ① $(P,Q) \longmapsto <P,Q>$ va bien de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

② $\forall (P,Q) \in E^2$,

$<P,Q> = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t) e^{-t} dt = <Q,P>$

donc $<\cdot,\cdot>$ est symétrique

③ $\forall (P,Q,R) \in E^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$<\lambda P+Q, R> = \int_0^{+\infty} (\lambda P(t) + Q(t)). R(t) e^{-t} dt$

$= \lambda \int_0^{+\infty} P(t)R(t)e^{-t} dt + \int_0^{+\infty} Q(t)R(t)e^{-t} dt$

$= \lambda <P,R> + <Q,R>$ donc $<\cdot,\cdot>$ est linéaire à gauche.

Etant symétrique, $<\cdot,\cdot>$ est aussi linéaire à droite donc $<\cdot,\cdot>$ est bilinéaire.

④ $\forall P \in E$, $<P,P> = \int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t} dt \geq 0$ car intégrale d'une fonction continue, positive, avec les bornes dans le bon sens. Donc $<\cdot,\cdot>$ est positive.

⑤ Soit $P \in E$ tel que $<P,P> = 0$.

Alors $\int_0^{+\infty} P(t)^2 e^{-t} dt = 0$. Comme $t \mapsto P(t)^2 e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et positive, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $P(t)^2 e^{-t} = 0$.

Donc $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $P(t) = 0$. Par conséquent P a une infinité de racines donc $P = 0$.

Ainsi $<P,P> = 0 \Rightarrow P = 0$: $<\cdot,\cdot>$ est définie positive.

Bilan : $<\cdot,\cdot>$ est un produit scalaire sur E.

4. $\forall (i,j) \in [\![0;n]\!]^2$,

$$\langle X^i, X^j \rangle = \int_0^{+\infty} t^{i+j} e^{-t} dt = \Gamma(i+j+1) = (i+j)!$$

Exercice 2

1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

$P \in E \iff P(0) = P(1) = 0$

$\iff P$ a pour racines 0 et 1

$\iff P = X(X-1)Q$ où $\deg Q \leq n-2$

$\iff P = X(X-1) \cdot \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k$ où $(a_0, \dots, a_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$\iff P = \sum_{k=0}^{n-2} a_k (X-1) X^{k+1}$ où $(a_0, \dots, a_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n+1}$

Donc

$E = \mathrm{Vect}\left((X-1)X^{k+1}\right)_{k \in [\![0;n-2]\!]}$

$= \mathrm{Vect}\left(X(X-1), X^2(X-1), \dots, X^{n-1}(X-1)\right)$

Donc E est un sev de $\mathbb{R}_n[X]$.

La famille $\mathcal{B}_E = (X(X-1), \dots, X^{n-1}(X-1))$ est génératrice de E et libre car formée des polynômes de degré deux à deux distincts. C'est donc une base de E.

D'où $\dim E = n-1$

2.

(a) $\forall P \in E$,

$$\Phi(P,P) = -2\int_0^1 P(x)P''(x)\,dx$$

Posons $\begin{cases} u(x) = P(x) \\ v'(x) = P''(x) \end{cases} \to \begin{cases} u'(x) = P'(x) \\ v(x) = P'(x) \end{cases}$

où u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$.

Par IPP,

$$\Phi(P,P) = -2\left([P(x)P'(x)]_0^1 - \int_0^1 (P'(x))^2 dx\right)$$

$$= \underbrace{-2P(1)P'(1)}_{=0 \text{ car } P(1)=0} + \underbrace{2P(0)P'(0)}_{=0 \text{ car } P(0)=0} - 2\int_0^1 (P'(x))^2 dx$$

$$\Phi(P,P) = -2\int_0^1 (P'(x))^2 dx$$

(b)

① Pour tout $(P,Q) \in E^2$, on a $P \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ donc $x \mapsto P(x)Q''(x) + P''(x)Q(x)$ est continue sur $[0;1]$. Par conséquent l'intégrale de l'énoncé est bien définie et Φ va bien de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

② $\forall (P,Q)\in E^2$,

$$\Phi(P,Q) = -\int_0^1 P(x)Q''(x)+P''(x)Q(x)\,dx = \Phi(Q,P)$$

donc Φ est symétrique.

③ $\forall (P,Q,R)\in E^3, \forall \lambda\in\mathbb{R}$,

$$\Phi(\lambda P+Q,R) = -\int_0^1 (\lambda P(x)+Q(x)).R''(x)+(\lambda P+Q)''(x)R(x)\,dx$$

$$= \lambda.\left(-\int_0^1 P(x)R''(x)+P''(x)R(x)\,dx\right)+\left(-\int_0^1 Q(x)R''(x)+Q''(x)R(x)\,dx\right)$$

$$= \lambda\Phi(P,R)+\Phi(Q,R)$$

donc Φ est linéaire à gauche.

Etant symétrique, Φ est aussi linéaire à droite et donc bilinéaire.

④ $\forall P\in E$, $\Phi(P,P) = 2\int_0^1 (P'(x))^2\,dx \geq 0$ d'après le 2(a)

car $x\mapsto (P'(x))^2$ est continue et positive sur $[0;1]$.

Donc Φ est positive.

⑤ Soit $P\in E$.

$$\Phi(P,P)=0 \iff \int_0^1 (P'(x))^2\,dx = 0$$

Comme $x\mapsto (P'(x))^2$ est continue et positive sur $[0;1]$,

$\forall x\in[0;1]$, $(P'(x))^2=0 \iff P'(x)=0$.

P' a une infinité de racines donc $P'=0_{\mathbb{R}[X]}$.

Par conséquent P est constant : $\exists c\in\mathbb{R} \,/\, P=c$.

Or $P(0)=0$ donc $c=0$ et $P=0_{\mathbb{R}[X]}$.

Donc Φ est définie positive.

Bilan : d'après ① ② ③ ④ ⑤, Φ est un produit scalaire sur E.

Exercice 3

On considère $(u,v,w) = ((1,1,0),(1,2,1),(-1,3,-1))$.

Soit $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u,v,w) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ la matrice dans la base canonique de $(u,v,w)=\mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ ssi P est inversible.

Par la méthode des réduites :

$$P \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} L_2\leftarrow L_2-L_1 \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} L_3\leftarrow L_3-L_2$$

P est inversible ssi ses réduites le sont.

La dernière réduite est triangulaire avec une diagonale non nulle donc inversible.

Donc P est inversible et (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

Procédé de Schmidt :

* $\|u\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ on pose $N_1 = \frac{1}{\|u\|}.u$

$N_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$

* $R_2 = v - \langle v ; N_1 \rangle . N_1$

$= (1,2,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}.(1+2).\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$

$= (1,2,1) - \frac{3}{2}(1,1,0)$

$= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$

$\|R_2\| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$

On pose $N_2 = \frac{1}{\|R_2\|}.R_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}.\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

* $R_3 = w - \langle w, N_1 \rangle . N_1 - \langle w, N_2 \rangle . N_2$

$R_3 = (-1,3,-1) - \frac{1}{2}.(-1+3).(1,1,0) - \frac{2}{3}.\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-1\right).\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$

$= (-1,3,-1) - (1,1,0) - \frac{2}{3}.\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$

$= (-2,2,-1) + \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

$= \left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3}.(-1,1,-1)$

Puis $\|R_3\| = \frac{5}{3}.\sqrt{3} = \frac{5}{\sqrt{3}}$

$N_3 = \frac{\sqrt{3}}{5}.\frac{5}{3}(-1,1,1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)$

Bilan : en posant $\begin{cases} N_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0) \\ N_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right) \\ N_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1) \end{cases}$

la famille (N_1, N_2, N_3) est une BON de $\mathbb{R}^3$ obtenue à partir de (u,v,w) en appliquant le procédé de Schmidt.

Exercice 4

1. Cf exercice du cours.

2. (a). * Tout d'abord, la famille $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ est une base de $E = \mathbb{R}_2[X]$ car : $\mathcal{B}$ est libre (formée de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts) et $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(E)$.

* $\langle P_0, P_1\rangle = \int_0^1 2t-1\,dt = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - 1 = 0$

$\langle P_0, P_2\rangle = \int_0^1 6t^2-6t+1\,dt = 6\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 - 6\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + 1$
$= 2-3+1 = 0$

$\langle P_1, P_2\rangle = \int_0^1 (2t-1)(6t^2-6t+1)\,dt$
$= \int_0^1 12t^3-12t^2+2t-6t^2+6t-1\,dt$
$= 12\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 - 18\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + 8\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 - 1$
$= 3-6+4-1 = 0$

* Ainsi $\underline{\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)}$ <u>est une base orthogonale de E</u>

<u>pour ce produit scalaire.</u>

(b) Il suffit de normer les vecteurs de $\mathcal{B}$.

$\|P_0\|^2 = \int_0^1 1\,dt = 1$ donc $\|P_0\| = 1$

$\|P_1\|^2 = \int_0^1 (2t-1)^2dt = \int_0^1 4t^2-4t+1\,dt$
$= 4\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 - 4\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + 1 = \frac{4}{3} - 2 + 1 = \frac{1}{3}$

Donc $\|P_1\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\|P_2\|^2 = \int_0^1 (6t^2-6t+1)^2dt$

$(6t^2-6t+1)^2 = 36t^4+36t^2+1-72t^3+12t^2-12t$
$= 36t^4-72t^3+48t^2-12t+1$

$\|P_2\|^2 = 36\left[\frac{t^5}{5}\right]_0^1 - 72\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 + 48\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 - 12\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + 1$
$= \frac{36}{5} - 18 + 16 - 6 + 1 = \frac{36}{5} - 7 = \frac{1}{5}$

$\|P_2\| = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

D'où : <u>la famille $\mathcal{B}' = (Q_0, Q_1, Q_2)$ est une BON de E,</u>

où : $Q_0 = 1$ $\quad Q_2 = \sqrt{5}(6X^2-6X+1)$
$Q_1 = \sqrt{3}(2X-1)$

3. On part de $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2)$.

• $N_1 = 1$ convient d'après le 2.

• $R_2 = X - \langle X; 1\rangle . 1$

Or $\langle X, 1\rangle = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$ donc $R_2 = X - \frac{1}{2}$

$\|R_2\|^2 = \int_0^1 (t-\frac{1}{2})^2dt = \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{4})dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \frac{1}{4}$
$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{4-6+3}{12} = \frac{1}{12}$ donc $\|R_2\| = \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$

Ainsi $N_2 = \frac{1}{\|R_2\|} . R_2 = 2\sqrt{3}(X - \frac{1}{2}) = Q_1$!!

• $R_3 = X^2 - \langle X^2, 1\rangle . 1 - \langle X^2; N_2\rangle . N_2$

$$\langle X^2, 1\rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

$$\langle X^2, N_2\rangle = 2\sqrt{3}\cdot \int_0^1 t^2\cdot\left(t-\frac{1}{2}\right)dt$$

$$= 2\sqrt{3}\cdot\left(\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1\right)$$

$$= 2\sqrt{3}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) = 2\sqrt{3}\cdot\frac{3-2}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

D'où

$$R_2 = X^2 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}\cdot 2\sqrt{3}\left(X-\frac{1}{2}\right)$$

$$= X^2 - \frac{1}{3} - \left(X - \frac{1}{2}\right) = X^2 - X + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = X^2 - X + \frac{1}{6}$$

On remarque que $R_2 = \frac{1}{6} P_2$.

Comme $\|P_2\| = \frac{1}{\sqrt{5}}$, on a $\|R_2\| = \frac{1}{6\sqrt{5}}$

et $N_2 = 6\sqrt{5}\left(X^2 - X + \frac{1}{6}\right) = Q_2$.

Finalement : on retrouve la base (Q_0, Q_1, Q_2) du 2.(b)

$\boxed{\text{Exercice 5}}$

1. ① φ va bien de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

② Soit $u = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\varphi(u,v) = 3x_1y_1 + 3x_2y_2 - 2x_1y_2 - 2y_1x_2$$

$$= 3y_1x_1 + 3y_2x_2 - 2y_1x_2 - 2x_1y_2$$

$$= \varphi(v,u)$$

donc φ est symétrique.

③ Soit $(u,v,w) \in (\mathbb{R}^2)^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, avec $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2)$, $w = (z_1, z_2)$. Alors

$$\varphi(\lambda u + v, w) = \varphi((\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2), (z_1, z_2))$$

$$= 3(\lambda x_1 + y_1)z_1 + 3(\lambda x_2 + y_2)z_2 - 2(\lambda x_1 + y_1)z_2 - 2z_1(\lambda x_2 + y_2)$$

$$= \lambda\left(3x_1z_1 + 3x_2z_2 - 2x_1z_2 - 2z_1x_2\right) + \left(3y_1z_1 + 3y_2z_2 - 2y_1z_2 - 2z_1y_2\right)$$

$$= \lambda\varphi(u,w) + \varphi(v,w)$$

donc φ est linéaire à gauche. Etant symétrique, φ est bilinéaire.

④ $\forall u = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi(u,u) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_2$$

$$= 3x_1^2 - 4x_1x_2 + 3x_2^2$$

$$= (\sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2$$

$$\geq 0 \quad (\text{somme de carrés})$$

5. $\varphi(u,u) = 0 \iff (\sqrt{2}x_1 - \sqrt{2}x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$

$$\iff x_1 = x_2 = 0 \iff u = 0$$

Car une somme de réels positifs est nulle ssi tous les réels sont nuls.

$\boxed{\text{Bilan : } \varphi \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}^2.}$

2. La famille $(u,v) = ((1,1),(0,2))$ est une base de $\mathbb{R}^2$: c'est une famille libre (vecteurs non colinéaires) de cardinal 2.

3. $\|u\|^2 = \varphi((1,1),(1,1)) = 3+3-2-2 = 2$ donc $\|u\| = \sqrt{2}$

Donc $N_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

- $R_2 = v - \langle v ; N_1 \rangle . N_1$

$= (0,2) - \frac{1}{2} . \varphi((1,1),(0,2)) . (1,1)$

Or $\varphi((1,1),(0,2)) = 0 + 6 - 4 - 0 = 2$

$R_2 = (0,2) - (1,1) = (-1,1)$

$\|R_2\|^2 = \varphi((-1,1),(-1,1))$
$= 3+3+2+2 = 10$ donc $\|R_2\| = \sqrt{10}$

et $N_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1,1)$

Bilan : (N_1, N_2) est une BON de E pour ce produit scalaire.

4. Pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$:

$\|u\|^2 = \sqrt{2}$ donc $N_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$

$R_2' = v - \langle v ; N_1 \rangle . N_1$

$= (0,2) - \frac{1}{2} . \langle (0,2),(1,1) \rangle . (1,1)$

$= (0,2) - (1,1) = (-1,1)$

$\|R_2'\| = \sqrt{2}$ donc $N_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)$

Bilan : (N_1', N_2') est une BON de E pour le produit scalaire canonique.

Exercice 6

Autour des polynômes de Legendre.

1. Soit $0 \le i < j \le n$.

$$\langle L_i ; L_j \rangle = \int_0^1 (P_i)^{(i)}(t) . (P_j)^{(j)}(t)\, dt$$

On pose $u(t) = (P_i)^{(i)}(t)$ $\quad u'(t) = (P_i)^{(i+1)}(t)$

$v'(t) = (P_j)^{(j)}(t)$ $\quad v(t) = (P_j)^{(j-1)}(t)$. $\left(j \geq 1 \atop i < j \right)$

u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$. Par IPP :

$$\langle L_i, L_j \rangle = \left[P_i^{(i)}(t) . P_j^{(j-1)}(t) \right]_0^1 - \int_0^1 P_i^{(i+1)}(t)\, P_j^{(j-1)}(t)\, dt$$

Comme 0 et 1 sont des racines d'ordre j de P_j,
d'après le cours sur les polynômes $P_j^{(j-1)}(0) = P_j^{(j-1)}(1) = 0$.

Finalement,

$$\langle L_i, L_j \rangle = -\int_0^1 P_i^{(i+1)}(t)\, P_j^{(j-1)}(t)\,dt$$

2. Par le même type d'IPP que précédemment, on obtient

$$\langle L_i, L_j \rangle = \int_0^1 P_i^{(i+2)}(t)\, P_j^{(j-2)}(t)\,dt$$

$$= \dots$$

$$= (-1)^{i+1} \int_0^1 P_i^{(2i+1)}(t) \cdot P_j^{(j-i-1)}(t)\,dt$$

avec $j-i-1 \geq 0$

Comme $\deg P_i = 2i$,
on a $\deg P_i^{(2i)} = 0$ et $P_i^{(2i+1)} = 0$ donc $\underline{\langle L_i, L_j \rangle = 0}$.

3. Par symétrie du produit scalaire,
$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2$ avec $i \neq j$, on a $\langle L_i, L_j \rangle = 0$.

Donc <u>la famille $(L_k)_{k \in [\![0;n]\!]}$ est orthogonale</u>.

$\boxed{\text{Exercice 7}}$ <u>Polynômes de Lagrange</u>

1. (1) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ va bien de $\mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$.

(2) $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]$,
$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k) = \langle Q, P \rangle$ donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est <u>symétrique</u>

(3) $\forall (P,Q,R) \in \mathbb{R}_n[X]^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\langle \lambda P + Q, R \rangle = \sum_{k=0}^{n} (\lambda P(k) + Q(k)) R(k)$$

$$= \lambda \sum_{k=0}^{n} P(k) R(k) + \sum_{k=0}^{n} Q(k) R(k)$$

$$= \lambda \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle$$

Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à gauche.
Par symétrie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire.

(4) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
$\cdot \langle P, P \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)^2 \geq 0$

(5) $\langle P, P \rangle = 0 \iff \sum_{k=0}^{n} (P(k))^2 = 0$

$\iff P(0) = P(1) = \dots = P(n) = 0$

donc $P \in \mathbb{R}_n[X]$ admet $n+1$ racines distinctes.
Ceci implique que $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.
Donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est <u>définie positive</u>.

<u>Bilan</u> : $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. $\bullet$ Soit $k \in [\![0;n]\!]$. $\deg(L_k) = n$.

$\bullet$ Si $i \neq k$, i est racine de L_k donc $L_k(i) = 0$.

$\bullet$ Si $i = k$:

$$L_k(k) = \frac{(-1)^{n-k}}{n!}\binom{n}{k} \cdot \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} (k-j)$$

$$= \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \cdot k(k-1)\dots 1.(-1)(-2)\dots(k-n)$$

$$= \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \cdot k! \cdot (-1)^{n-k} \cdot 1.2\dots(n-k)$$

$$= 1$$

Donc L_k vérifie bien les conditions souhaitées.

$*$ Soit Q un polynôme de degré n vérifiant les mêmes conditions. Alors $\forall i \in [\![0;n]\!]$,

$(L_k - Q)(i) = L_k(i) - Q(i) = 0$.

Comme $\deg(L_k - Q) \leq n$ et $L_k - Q$ admet $n+1$ racines distinctes, on a $L_k - Q = 0 \Leftrightarrow Q = L_k$, d'où l'unicité.

Bilan : $\forall k \in [\![0;n]\!]$, L_k est l'unique polynôme de degré n tel que

$$\forall i \in [\![0;n]\!],\ L_k(i) = \delta_{ik} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \\ 1 \text{ si } i = k \end{cases}$$

3.

$\bullet$ Soit $(i;j) \in [\![0,n]\!]^2$ avec $i \neq j$. Alors

$$\langle L_i ; L_j \rangle = \sum_{k=0}^{n} L_i(k) L_j(k)$$

$$= \underbrace{\sum_{\substack{k\in[\![0;n]\!] \\ k\neq i}} \underbrace{L_i(k)}_{\substack{=0 \\ \text{car } i\neq k}} L_j(k)}_{=0} + L_i(i)\underbrace{L_j(i)}_{\substack{=0 \\ \text{car } j\neq i}}$$

$$= 0$$

$\bullet$ Donc $(L_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est une famille de vecteurs non nuls qui est orthogonale. Cette famille est libre d'après le cours. De plus $\mathrm{Card}((L_k)_{k\in[\![0;n]\!]}) = n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$.

Donc $(L_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Rque : $\forall k \in [\![0;n]\!]$,

$\langle L_k ; L_k \rangle = 1$ donc $\|L_k\| = 1$:

$(L_k)_{k\in[\![0;n]\!]}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

$\boxed{\text{Exercice 8}}$

1. (1) $\langle \cdot,\cdot \rangle$ va bien de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$

(2) (3) la symétrie et la linéarité à gauche sont faciles à prouver. On en déduit la bilinéarité.

(4) $\forall P\in E,\ \langle P,P\rangle = \sum_{k=0}^{n} \frac{(P^{(k)}(a))^2}{(k!)^2} \geq 0$

(5) $\langle P,P\rangle = 0 \iff \forall k\in[\![0;n]\!],\ P^{(k)}(a)=0$

$\iff$ a est racine d'ordre au moins $n+1$.

Comme $\deg(P)\leq n$, on a forcément $P=0_{\mathbb{R}[X]}$

Donc $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est défini positif.

Bilan : $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. (a) * $\forall j\in[\![0;n]\!]$, $P_j=(X-a)^j$ a pour unique racine a, qui est d'ordre j.

D'après le cours : $\forall k\in[\![0;j-1]\!]$, $P_j^{(k)}(a)=0$.

De plus $P_j^{(j)}$ est constant et $P_j^{(j)}=j!$ donc $P_j^{(j)}(a)=j!$

En redérivant, $P_j^{(j+1)}=0$ et $\forall k\geq j+1$, $P_j^{(k)}(a)=0$.

Bilan : $\forall k\in[\![0;n]\!]$, $P_j^{(k)}(a)=\begin{cases}0 & \text{si } k\neq j\\ j! & \text{si } k=j\end{cases}$

* $\forall (i,j)\in[\![0;n]\!]^2$, avec $i\neq j$,

$$\langle P_i,P_j\rangle = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_i^{(k)}(a)}{k!}\cdot\frac{P_j^{(k)}(a)}{k!}$$

$$= \frac{P_i^{(i)}(a)}{i!}\cdot\frac{P_j^{(i)}(a)}{j!} \quad \text{car } P_i^{(k)}(a)=0 \text{ si } k\neq i$$

$\langle P_i,P_j\rangle$

$=0$ car $i\neq j$ donc $P_j^{(i)}(a)=0$.

* $\forall i\in[\![0;n]\!]$,

$$\langle P_i,P_i\rangle = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{P_i^{(k)}(a)}{k!}\right)^2 = \left(\frac{P_i^{(i)}(a)}{i!}\right)^2 = 1$$

Bilan : $\mathcal{B}=(P_0,\dots,P_n)$ est une famille orthonormée de E.

Comme $\mathrm{Card}(P_0,\dots,P_n)=n+1=\dim E$, cette famille libre est une base de E : c'est une base orthonormée de E.

(b). D'après la formule de Taylor pour les polynômes :

$\forall Q\in\mathbb{R}_n[X]$,

$$Q=\sum_{k=0}^{n}\frac{P^{(k)}(a)}{k!}\cdot(X-a)^k$$

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(Q)=\begin{pmatrix}\frac{P(a)}{0!}\\ \frac{P'(a)}{1!}\\ \vdots\\ \frac{P^{(n)}(a)}{n!}\end{pmatrix}$

3. $\forall j\in[\![0;n]\!]$, on considère $Q_j(X)=\sum_{i=0}^{j}(X-a)^i$.

$\forall (k,j)\in[\![0;n]\!]$,

$$\langle Q_k,Q_j\rangle = \sum_{i=0}^{k}\sum_{\ell=0}^{j}\langle P_i,P_\ell\rangle \text{ par bilinéarité}$$

Si $j\geq k$

$$\langle Q_k,Q_j\rangle = \sum_{i=0}^{k}\langle P_i,P_i\rangle = k+1$$

Si $k \geq j$

$$\langle Q_k, Q_j\rangle = \sum_{l=0}^{j}\sum_{i=0}^{k}\langle P_i, P_l\rangle$$
$$= \sum_{l=0}^{j}\langle P_l, P_l\rangle = j+1.$$

Bilan : $\langle Q_k, Q_j\rangle = \min(k,j)+1$

$\forall (k,j) \in [\![0;n]\!]^2$

Exercice 9

1. $Tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est linéaire.

On a par exemple $Tr(I_n) = n \neq 0$ donc $Im(Tr) \neq \{0\}$.

Par conséquent $\dim Im(Tr) \geq 1$. Comme $Im(Tr) \subset \mathbb{R}$,

$\dim Im(Tr) \leq 1$ d'où $\begin{cases} \dim Im(Tr) = 1 = \dim \mathbb{R} \\ Im(Tr) \subset \mathbb{R} \end{cases}$

ce qui implique $Im(Tr) = \mathbb{R}$: la trace est surjective.

. Th. du rang : $\dim Ker(Tr) + \dim Im(Tr) = \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$\Longrightarrow \dim Ker(Tr) = n^2 - 1$.

2. (a) . φ est un produit scalaire : cf en. de cours.

$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$\|A\|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$: cf en. de cours.

(b) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, appliquée à A et I_n :

$|\varphi(A, I_n)| \leq \|A\|.\|I_n\|$

Or : $\|I_n\| = \sqrt{Tr(I_n)} = \sqrt{n}$

$\varphi(A, I_n) = Tr({}^tI_n . A) = Tr(A)$.

D'où :

$|Tr(A)| \leq \sqrt{n}.\|A\|$

3.

* le fait que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se démontre de façon classique par analyse et synthèse.
* $\forall A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, $\forall B \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$,

$\varphi(A,B) = Tr({}^tA B) = Tr(AB)$

$\varphi(B,A) = Tr({}^tB A) = -Tr(BA) = -Tr(AB)$.

D'où $Tr(AB) = -Tr(AB) \Rightarrow Tr(AB) = 0 \Rightarrow \varphi(A,B) = 0$.

Donc $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \perp \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

* Par conséquent $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont supplémentaires orthogonaux.

Exercice 10 On considère $\mathbb{R}^n$, muni du p.s. canonique.

1. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz à $u = (|x_1|, \dots, |x_n|)$ et $v = (1, \dots, 1)$.

$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, $\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ et $\|v\| = \sqrt{n}$

D'où :

$$\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right| \leq \sqrt{n} . \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} .$$

De plus il y a égalité ssi u et v sont colinéaires,

ssi $|x_1| = \dots = |x_n|$

i.e. $x_1 = \pm x_2 = \dots = \pm x_n$.

2. Inégalité de Cauchy-Schwartz appliquée à $u = (1, 2, \dots, n)$ et $v = (\sqrt{1}, \sqrt{2}, \dots, \sqrt{n})$.

$\langle u, v \rangle = \sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k}$.

$\|v\| = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} k} = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$

$\|u\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k^2} = \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

D'où :

$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| . \|v\|$

donc :

$$\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} . \sqrt{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}}$$

Exercice 11

1. Soit $i \in [\![1, n]\!]$,

$\|e_i\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle e_i, e_k \rangle^2$

$\Leftrightarrow 1 = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \langle e_i, e_k \rangle^2 + \underbrace{\langle e_i, e_i \rangle^2}_{= \|e_i\|^4 = 1}$

$\Leftrightarrow \sum_{\substack{k \in [\![1, n]\!] \\ k \neq i}} \langle e_i, e_k \rangle^2 = 0$

$\Leftrightarrow \forall k \in [\![1, n]\!], k \neq i, \langle e_i, e_k \rangle = 0$

Donc les vecteurs e_i sont bien deux à deux orthogonaux.

2. $\|y\|^2 = \langle u - \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle e_i , u - \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle e_i \rangle$

$= \langle u, u \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle . \langle u, e_i \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle \langle u, e_i \rangle$

$+ \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle^2 . \langle e_i, e_i \rangle = \|u\|^2 - \|u\|^2 - \|u\|^2 + \|u\|^2 = 0$

Donc $y=0$ et $u=\sum_{i=1}^{n}\langle u,e_i\rangle . e_i$:

$u\in \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_n)$.

On en déduit que $(e_1,\dots,e_n)$ est une famille génératrice de E.

3. Etant formée de vecteurs non nuls deux à deux colinéaires, cette famille est libre. C'est donc une base de E.

Etant formée de vecteurs unitaires et deux à deux orthogonaux, $(e_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une BON de E.

Exercice 12

1. Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ avec $i\neq j$.

$$\langle e_i-e_j, e_i+e_j\rangle = \langle e_i,e_i\rangle - \langle e_i,e_j\rangle + \langle e_i,e_j\rangle - \langle e_j,e_j\rangle$$
$$= \|e_i\|^2 - 0 - 0 - \|e_j\|^2 = 1-1$$
$$=0$$

2. $\forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ avec $i\neq j$,

$\langle f(e_i-e_j), f(e_i+e_j)\rangle = 0$ par déf. de f, avec le 1.

D'où $\|f(e_i)\|^2 - \|f(e_j)\|^2 = 0 \Rightarrow \|f(e_i)\| = \|f(e_j)\|$.

Donc il existe $\alpha\in\mathbb{R}_+$ tel que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\|f(e_i)\|=\alpha$.

3. Soit $x\in E$, $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

$$\|f(x)\|^2 = \langle f(x); f(x)\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \langle f(e_i); f(e_j)\rangle$$

Si $i\neq j$, comme $\langle e_i; e_j\rangle = 0$ on a $\langle f(e_i), f(e_j)\rangle = 0$.

Donc

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \|f(e_i)\|^2$$
$$= \alpha^2 . \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \alpha^2 . \|x\|^2.$$

D'où : $\forall x\in E$, $\|f(x)\| = \alpha\|x\|$

Exercice 13 : endomorphisme adjoint

1. (a). Notons $X=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $Y=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$, $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Alors

$$\langle f(x), y\rangle = {}^t(AX).Y = {}^tX.{}^tAY$$
$$= {}^tX.({}^tAY) = \langle x; f^*(y)\rangle.$$

(b) Soit $g\in\mathcal{L}(E)$ tel que

$\forall (x,y)\in E\times E$, $\langle f(x); y\rangle = \langle x, g(y)\rangle$.

Alors $\forall x\in E$, $\langle x, g(y)\rangle = \langle x, f^*(y)\rangle$

$\Leftrightarrow \langle x; g(y)-f^*(y)\rangle = 0 \Leftrightarrow g(y)-f^*(y)\in E^\perp$

$\Leftrightarrow g(y)-f^*(y)=0 \Leftrightarrow f^*(y)=g(y)$

Donc $\forall y \in E$, $g(y) = f^*(y) \iff g = f^*$.

D'où l'unicité de f^*.

2. $f = f^* \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) \iff A = {}^tA$

Donc $f = f^*$ ssi A est une matrice symétrique.

3. Soit F stable par f.

Soit $u \in F^\perp$. Montrons que $f^*(u) \in F^\perp$.

$\forall v \in F$,

$\langle f^*(u), v\rangle = \langle u ; \underbrace{f(v)}_{\in F \text{ car } F \text{ stable par } f}\rangle = 0$ car $u \in F^\perp$

Donc $f^*(u) \in F^\perp$.

Par conséquent $F^\perp$ est stable par f^*.

4. (a). Soit λ une valeur propre de f.

Alors : λ est valeur propre de A

$\iff A - \lambda I$ non inversible

$\iff {}^t(A - \lambda I)$ non inversible

$\iff {}^tA - \lambda I$ non inversible

$\iff \lambda$ est valeur propre de ${}^tA$

$\iff \lambda$ est valeur propre de f^*.

Donc λ est une valeur propre de f^*.

(b) Soit u un vecteur propre de f^* associé à λ.

$\dim \mathrm{Vect}(u) = 1$ donc $\dim \mathrm{Vect}(u)^\perp = n-1$:

$(\mathrm{Vect}(u))^\perp$ est un hyperplan de E.

Soit $x \in (\mathrm{Vect}(u))^\perp$. Montrons que $f(x) \in (\mathrm{Vect}(u))^\perp$.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\langle f(x) ; \alpha u\rangle = \alpha \langle f(x), u\rangle$

$= \alpha \langle x ; f^*(u)\rangle$

$= \alpha\lambda \langle x ; u\rangle$

$= 0$ car $x \in (\mathrm{Vect}(u))^\perp$.

Donc $f(x) \in (\mathrm{Vect}(u))^\perp$: $(\mathrm{Vect}(u))^\perp$ est stable par f.

$\boxed{\text{Exercice 14}}$

Préliminaire : soit F une droite vectorielle de E : $\dim F = 1$

donc il existe un vecteur $u \neq 0_E$ tel que $F = \mathrm{Vect}(u)$.

$\Leftarrow$ Si F est stable par f alors $f(u) \in F$ donc $\exists \alpha \in \mathbb{R} / f(u) = \alpha u$.

Comme $u \neq 0$ et $f(u) = \alpha u$, u est bien un vecteur propre de f.

$\Rightarrow$ Supposons que u est un vecteur propre de f : $u \neq 0$

et $f(u) = \alpha u$. Soit $x \in \mathrm{Vect}(u)$: $\exists \lambda \in \mathbb{R} / x = \lambda u$.

Alors $f(x) = \lambda f(u) = \lambda\alpha u \in \mathrm{Vect}(u) = F$. Donc F est stable par f.

I. 1. (a) $\mathrm{Spec}({}^tA) = \mathrm{Spec}(A)$: classique.

(b) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}((f^*)^*) = {}^t({}^tA) = A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ donc $(f^*)^* = f$.

2. (a) Cf Ex. 13. (b)

(b) Idem.

3. (a)

$\subset$: Soit $u \in \mathrm{Ker}(f)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(f^*)$. $y = f^*(x)$ où $x \in E$.

Alors

$$\langle u ; y \rangle = \langle u ; f^*(x) \rangle = \langle f(u), x \rangle = 0$$

donc $\forall y \in \mathrm{Im}(f^*)$, $u \perp y$ donc $\mathrm{Ker}(f) \subset (\mathrm{Im}(f^*))^\perp$.

$\supset$: Soit $u \in (\mathrm{Im}(f^*))^\perp$. Alors

$$\|f(u)\|^2 = \langle f(u), f(u) \rangle = \langle u ; \underbrace{f^*(f(u))}_{\in \mathrm{Im}(f^*)} \rangle = 0 \text{ car } u \in (\mathrm{Im}(f^*))^\perp.$$

D'où $f(u) = 0_E$ et $u \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi $(\mathrm{Im}(f^*))^\perp \subset \mathrm{Ker}(f)$

Bilan : $\mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{Im}(f^*))^\perp$

(b)
$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(f) &= \dim \mathrm{Im}(f) \\ &= n - \dim \mathrm{Ker}(f) \quad \text{(Th. du rang)} \\ &= n - \dim (\mathrm{Im}(f^*))^\perp \quad \text{(question (a))} \\ &= n - (n - \dim \mathrm{Im}(f^*)) \quad \text{(propriété de l'orthogonal)} \end{aligned}$$

$\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f^*) = \mathrm{rg}(f^*)$

Donc f et f^* ont le même rang.

4.

$\Rightarrow$: Supposons F stable par f.

Montrons que $F^\perp$ stable par f^*. Soit $u \in F^\perp$.

$\forall v \in F$,

$$\langle f^*(u), v \rangle = \langle u, \underbrace{f(v)}_{\in F} \rangle = 0 \text{ car } u \in F^\perp.$$

Donc $f^*(u) \in F^\perp$: $F^\perp$ est stable par f^*.

$\Leftarrow$: Supposons $F^\perp$ stable par f^*.

D'après le sens $\Rightarrow$: $(F^\perp)^\perp = F$ est stable par $(f^*)^* = f$.

Bilan : F stable par $f \iff F^\perp$ stable par f^*

II. 1.

$P(A) = (A - 3I)^2(A - I) = \dots = 0$

donc $P = (X-3)^2(X-1)$ est un polynôme annulateur de A, donc de f.

2. (a) $\mathrm{Spec}(A) \subset \{\text{racines de } P\}$ donc $\mathrm{Spec}(A) \subset \{1, 3\}$.

* Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$X \in \mathrm{Ker}(A - I) \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

$X \in \mathrm{Ker}(A-I) \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}(A-I) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

* Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$X \in \mathrm{Ker}(A-3I) \Leftrightarrow (A-3I)X = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y+z \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}(A-3I) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ d'où $\mathrm{Spec}(f) = \{1, 3\}$

(b) $\mathrm{Ker}(f-Id) = \mathrm{Vect}((1,-1,0))$ et $\mathrm{Ker}(f-3Id) = \mathrm{Vect}((1,1,0))$

$\sum_{\lambda \in \mathrm{Spec} f} \dim \mathrm{Ker}(f-\lambda Id) = 2 \neq 3$

donc f n'est pas diagonalisable.

Comme $0 \notin \mathrm{Spec}(f)$, f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.

3. D'après ce qui précède, $\mathrm{Spec}(f^*) = \mathrm{Spec}(f) = \{1, 3\}$.

De plus $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

* $X \in \mathrm{Ker}({}^tA - I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ -x \\ 0 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}({}^tA - I) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ donc $\mathrm{Ker}(f^* - Id) = \mathrm{Vect}((1,-1,0))$

* $X \in \mathrm{Ker}({}^tA - 3I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=0 \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}({}^tA - 3I) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ donc $\mathrm{Ker}(f^* - 3Id) = \mathrm{Vect}((0,0,1))$

4. (a). D'après le préliminaire, les droites vectorielles stables par f sont engendrées par un vecteur propre.

Donc les deux droites vectorielles stables par f sont $\mathrm{Ker}(f-Id) = \mathrm{Vect}((1,-1,0))$ et $\mathrm{Ker}(f-3Id) = \mathrm{Vect}((1,1,0))$

(b) Soit F un plan vectoriel stable

D'après le I.4,

F stable par $f \Leftrightarrow F^\perp$ est stable par f^*.

Comme $\dim F = 2$, on a $\dim F^\perp = 1$: $F^\perp$ est une droite vectorielle stable par f^*.

Donc $F^\perp = \mathrm{Vect}((1,-1,0))$ ou $F^\perp = \mathrm{Vect}((0,0,1))$

Par conséquent les plans vectoriels stables par f sont :

$F_1 = \mathrm{Vect}((1,-1,0))^\perp = \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,0,1))$

$F_2 = \mathrm{Vect}((0,0,1))^\perp = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$

(c) Finalement, les sev de $\mathbb{R}^3$ stables par f sont :

En dimension 0 : $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$

En dimension 1 : $\mathrm{Ker}(f-Id) = \mathrm{Vect}((1,-1,0))$

$\mathrm{Ker}(f-3Id) = \mathrm{Vect}((1,1,0))$

En dimension 2 : $F_1 = \mathrm{Vect}((1,1,0),(0,0,1))$

$F_2 = \mathrm{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$

En dimension 3 : $E = \mathbb{R}^3$.

Exercice 15 :

1. (a) $\forall (x,y,z) \in E^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$\langle f(x+\lambda y), z\rangle = -\langle x+\lambda y, f(z)\rangle$ d'une part et

$\langle f(x)+\lambda f(y), z\rangle = \langle f(x), z\rangle + \lambda\langle f(y), z\rangle$
$= -\langle x, f(z)\rangle - \lambda\langle y, f(z)\rangle$

$\langle f(x)+\lambda f(y), z\rangle = -\langle x+\lambda y, f(z)\rangle$.

(b) D'où : $\forall z \in E$,

$\langle f(x+\lambda y), z\rangle = \langle f(x)+\lambda f(y), z\rangle$

$\Rightarrow \langle f(x+\lambda y) - (f(x)+\lambda f(y)), z\rangle = 0$

Donc $f(x+\lambda y) - (f(x)+\lambda f(y)) \in E^\perp$, d'où $=0$ et

$f(x+\lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$ et ce $\forall (x,y) \in E^2$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Par conséquent f est une application linéaire.

2. (a)

$\Rightarrow$: Supposons u antisymétrique. Alors $\forall x \in E$,

$\langle x, u(x)\rangle = -\langle u(x), x\rangle \Rightarrow 2\langle x, u(x)\rangle = 0$
$\Rightarrow \langle x, u(x)\rangle = 0$

$\Leftarrow$: Supposons que $\forall x \in E$, $\langle x, u(x)\rangle = 0$.

Alors $\forall (x,y) \in E^2$,

$\langle x+y, u(x+y)\rangle = 0 \Leftrightarrow \underbrace{\langle x, u(x)\rangle}_{=0} + \langle y, u(x)\rangle + \langle x, u(y)\rangle + \underbrace{\langle y, u(y)\rangle}_{=0} = 0$

$\Rightarrow \langle x, u(y)\rangle = -\langle u(x), y\rangle$.

Donc u est bien antisymétrique.

Bilan : u antisymétrique $\Leftrightarrow \forall x \in E$, $\langle x, u(x)\rangle = 0$

(b)

$\Leftarrow$: Supposons que $A = \mathrm{Mat}(u)$ est antisymétrique.

Alors $\forall (x,y) \in E^2$, avec $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$, $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$,

$$\langle x, u(y)\rangle = {}^tX.AY = -{}^tX\,{}^tAY = -{}^t(AX)Y = -\langle u(x), y\rangle$$

donc u est antisymétrique.

$\Rightarrow$: Supposons que u est antisymétrique.

Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

$\forall (X,Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$,

${}^tX.AY = -{}^t(AX)Y = -{}^tX\,{}^tAY$.

Dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$\langle X, AY\rangle = -\langle X, {}^tAY\rangle \Rightarrow \langle X, AY + {}^tAY\rangle = 0$

Donc $AY + {}^tAY \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^\perp$ d'où $AY + {}^tAY = 0$.

Ainsi $\forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(A + {}^tA)Y = 0$.

L'application linéaire associée à $A + {}^tA$ est l'application nulle,

donc $A + {}^tA = 0 \Leftrightarrow \underline{{}^tA = -A}$.

Ainsi A est antisymétrique.

Bilan : u est antisymétrique

$\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est antisymétrique

3. Soit f antisymétrique.

(a) • Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$ et $y \in \mathrm{Im}(f)$: $\exists z \in E / y = f(z)$.

$$\langle x, y\rangle = \langle x, f(z)\rangle$$
$$= -\langle f(x), z\rangle = -\langle 0, z\rangle = 0$$

(car $x \in \mathrm{Ker}(f)$)

Donc $\mathrm{Ker}(f) \perp \mathrm{Im}(f)$. Par suite, ces sev sont en somme directe : $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. (1)

• D'après le th. du rang, $\dim \mathrm{Ker}(f) + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim E$. (2)

D'après (1) et (2), $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$: ces ev sont bien orthogonaux et supplémentaires dans E.

(b) • L'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ est classique.

• Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^2)$. Alors $f(f(x)) = 0_E$ d'où

$f(x) \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$. D'après le 3.(a), $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$

donc $f(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(f)$.

Bilan : $\underline{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)}$.

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f et u un vecteur propre associé. Alors

$\langle u, f(u)\rangle = -\langle f(u), u\rangle \Leftrightarrow \lambda\langle u,u\rangle = -\lambda\langle u,u\rangle$

$\Leftrightarrow \lambda\|u\|^2 = -\lambda\|u\|^2 \Leftrightarrow \lambda = 0$ car $u \neq 0$.

Donc f a pour unique valeur propre 0.

Si f est diagonalisable ds $\mathbb{R}$ alors $\exists \mathcal{B}'$ base de E /

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} = 0$ donc $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$.

f est diagonalisable ssi f est l'application nulle.

(d) $\forall (x,y) \in E^2$,

$\langle f^2(x), y\rangle = -\langle f(x), f(y)\rangle$

et $\langle x, f^2(y)\rangle = -\langle f(x), f(y)\rangle$

d'où $\langle f^2(x), y\rangle = \langle x, f^2(y)\rangle$: f^2 est symétrique.

(e) Soit e un vecteur propre de f^2 : $e \neq 0_E$ et il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f^2(e) = \alpha e$. Comme f^2 symétrique, $\alpha \geq 0$.
De plus f^2 bijective donc $\alpha \neq 0$: $\alpha > 0$.

(i) $\dim \mathrm{Vect}(e, f(e)) = 2 \Leftrightarrow$ la famille $(e, f(e))$ est libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda_1 e + \lambda_2 f(e) = 0_E$. (L_1)

Alors

$\lambda_1 f(e) + \lambda_2 f^2(e) = 0_E \Leftrightarrow \alpha\lambda_2 e + \lambda_1 f(e) = 0_E$ (L_2)

En calculant $\lambda_1 L_1 - \lambda_2 L_2$:

$(\lambda_1^2 - \alpha\lambda_2^2)e = 0 \Rightarrow \lambda_1^2 - \alpha\lambda_2^2 = 0$ car $e \neq 0$

$\Rightarrow \lambda_1^2 = \alpha\lambda_2^2$

$\Rightarrow |\lambda_1| = \sqrt{\alpha}|\lambda_2| \Rightarrow \lambda_1 = \pm\sqrt{\alpha}\lambda_2$

D'où $\pm\sqrt{\alpha}\lambda_2 e + \lambda_2 f(e) = 0_E$.

- Si $\lambda_2 \neq 0$ alors $f(e) = \pm\sqrt{\alpha}\, e$.

Donc $\pm\sqrt{\alpha}$ vp de f, ce qui implique $\pm\sqrt{\alpha} = 0$ donc $\alpha = 0$.

Absurde car $\alpha > 0$ (cf ci-dessus).

- Donc $\lambda_2 = 0$ et avec L_1 : $\lambda_1 e = 0$ d'où $\lambda_1 = 0$.

Enfin $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$: la famille est libre et

$F = \mathrm{Vect}(e, f(e))$ est de dimension 2.

ii. Soit $x \in F$: $x = \beta_1 e + \beta_2 f(e)$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

$f(x) = \beta_1 f(e) + \beta_2 f^2(e) = \alpha\beta_2 e + \beta_1 f(e)$

donc $f(x) \in F$. Ainsi F est stable par f.

iii. Soit $v \in F^\perp$. $\forall u \in F$,

$\langle f(v), u\rangle = -\langle v, \underbrace{f(u)}_{\in F}\rangle = 0$ car $v \in F^\perp$.

Donc $f(v) \in F^\perp$.

Ainsi $F^\perp$ est stable par f.

Exercice 17 : Polynômes de Tchebychev.

1. Classique mais long. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$

$t \mapsto \dfrac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1;1[$.

$I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ est impropre en -1 et en 1.

Elle converge ssi $J = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ et $K = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ convergent.

* $\dfrac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{P(t)}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}}$.

. Si 1 est racine de P alors $P(t) = (1-t)Q(t)$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$

donc $\dfrac{P(t)}{\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{-\sqrt{1-t}}{\sqrt{1+t}} P(t) \underset{t \to 1}{\longrightarrow} 0$: K est faussement impropre

. Si $P(1) \neq 0$ alors

$\left|\dfrac{P(t)}{\sqrt{1-t}\sqrt{1+t}}\right| \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{|P(1)|}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt$ converge (Riemann en 1, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$)

donc par équivalence, K converge absolument donc converge.

* Raisonnements analogues pour J.

Bilan : les intégrales J et K sont convergentes, donc I converge.

2. Classique

Attention ① $\forall (P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt$ converge donc φ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

3. Polynômes de Tchebychev : classique.

(a) $P_2 = 2XP_1 - P_0 = 2X^2 - 1$

$P_3 = 2XP_2 - P_1 = 2X(2X^2-1) - X = 4X^3 - 3X$

$P_4 = 2XP_3 - P_2 = 2X(4X^3 - 3X) - (2X^2 - 1)$

$= 8X^4 - 6X^2 - 2X^2 + 1$

$= 8X^4 - 8X^2 + 1$

(b) Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$

H(n) : « P_n est un polynôme de degré n et de coeff. dominant 2^{n-1}
P_{n+1} ______ $n+1$ ______ 2^n »

Initialisation : si $n = 1$, $P_1 = X$ et $P_2 = 2X^2 - 1$ donc $H(1)$ vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé tel que $H(n)$ vraie.

$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$ donc P_{n+2} est bien un polynôme.

Par HR $\deg(2XP_{n+1}) = n+2$ et $\deg(P_n) = n$.

Comme $\deg(2XP_{n+1}) > \deg(P_n)$, on a

$\deg(P_{n+2}) = \deg(2XP_{n+1}) = n+2$.

Le coeff. dominant de P_{n+2} est celui de $2XP_{n+1}$,

donc $2 \times 2^n = 2^{n+1}$. Donc $H(n+1)$ est vraie.

Bilan : par récurrence, nous avons montré que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P_n) = n$ et P_n a pour coeff dominant 2^{n-1}.

c. (i) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos((n+2)\theta) = \cos((n+1)\theta + \theta)$$
$$= \cos((n+1)\theta)\cos(\theta) - \sin((n+1)\theta)\sin(\theta)$$

$$\cos(n\theta) = \cos((n+1)\theta - \theta)$$
$$= \cos((n+1)\theta)\cos(\theta) + \sin((n+1)\theta)\sin(\theta)$$

D'où

$$\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta) = 2\cos((n+1)\theta)\cos(\theta)$$

$$\cos((n+2)\theta) = 2\cos((n+1)\theta)\cos(\theta) - \cos(n\theta)$$

ii. Soit $\forall n \in \mathbb{N}$,

$H(n)$: " $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$
$P_{n+1}(\cos(\theta)) = \cos((n+1)\theta)$ ".

Initialisation : si $n=0$, $P_0 = 1$ donc

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, $P_0(\cos(\theta)) = 1 = \cos(0) = \cos(0 \times \theta)$

si $n = 1$, $P_1 = X$ donc

$\forall \theta \in \mathbb{R}$, $P_1(\cos(\theta)) = \cos(\theta)$

donc $H(1)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $H(n)$ est vraie.

$\forall \theta \in \mathbb{R}$,

$$P_{n+2}(\cos(\theta)) = 2\cos(\theta)P_{n+1}(\cos(\theta)) - P_n(\cos(\theta))$$
$$= 2\cos(\theta)\cos((n+1)\theta) - \cos(n\theta) \quad \text{par HR}$$
$$= \cos((n+2)\theta) \quad \text{d'après le } i.$$

donc $H(n+1)$ est vraie.

Bilan : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$

(d) $\forall (i,j) \in [\![0;n]\!]^2$,

$$\langle P_i, P_j \rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P_i(t)P_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$$

① Posons $t = \cos(\theta)$ ② $\theta \mapsto \cos(\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;\pi[$ et décroissante strictement, bij. de $]0;\pi[$ sur $]-1;1[$

③ $dt = -\sin(\theta)\,d\theta$ ④ $\begin{cases}\theta = 0 \\ \theta = \pi\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\theta = 1 \\ \theta = -1\end{cases}$

⑤ $$\frac{P_i(t)P_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{P_i(\cos\theta)P_j(\cos\theta)}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} \cdot (-\sin(\theta)\,d\theta)$$
$$= -P_i(\cos(\theta))P_j(\cos(\theta))\,d\theta$$
$$= -\cos(i\theta)\cos(j\theta)\,d\theta$$

⑥ $\theta \mapsto -\cos(i\theta)\cos(j\theta)$ est continue sur $]0;\pi[$.

D'où

$$\langle P_i, P_j\rangle = -\int_{\pi}^{0} \cos(i\theta)\cos(j\theta)\,d\theta$$

$$\langle P_i, P_j\rangle = \int_{0}^{\pi} \cos(i\theta)\cos(j\theta)\,d\theta$$

On a déjà vu que : $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$$\Rightarrow \frac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2} = \cos(a)\cos(b)$$

$$\langle P_i, P_j\rangle = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos((i+j)\theta)\,d\theta + \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos((i-j)\theta)\,d\theta$$

On suppose $i \neq j$. Alors :

$$\langle P_i, P_j\rangle = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((i+j)\theta)}{i+j}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((i-j)\theta)}{i-j}\right]_0^{\pi}$$

$$= 0$$

Donc $(P_0, \dots, P_n)$ est une famille orthogonale.

Etant formée de polynômes non nuls, elle est libre.

De plus $\mathrm{Card}(P_0, \dots, P_n) = n+1 = \dim E$ donc enfin

$(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthogonale de E.

Exercice 18

1. $E = \mathrm{Vect}\left(\left(\frac{1}{2^n}\right), \left(\frac{(-1)^n}{2^n}\right), \left(\frac{1}{4^n}\right)\right)$ donc E est un sev de l'ev des suites numériques.

On montre (classique) que la famille $\left(\left(\frac{1}{2^n}\right), \left(\frac{(-1)^n}{2^n}\right), \left(\frac{1}{4^n}\right)\right)$ est libre.

C'est donc une base de E.

2. Pas très difficile.

3. Abordable.

4. Procédé de Schmidt. Notons $(u_n) = \left(\frac{1}{2^n}\right)$

$(v_n) = \left(\frac{(-1)^n}{2^n}\right)$

$(w_n) = \left(\frac{1}{4^n}\right)$

$\ast$ $\|(u_n)\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$

Donc $(U_n) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2^n}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2^{n+1}}\right)$ est normée.

$\ast$ $\forall n \in \mathbb{N}$,

$(V_n') = (v_n) - \langle (v_n), (U_n)\rangle . (U_n)$

$\langle (v_n), (U_n)\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{1}{4})} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4\sqrt{3}}{5\cdot 2}$

$\forall n \in \mathbb{N}$,

$V_n' = \frac{(-1)^n}{2^n} - \frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2^n} = \frac{(-1)^n}{2^n} - \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2^n} = \frac{3}{5}\cdot\frac{5\cdot(-1)^n - 3}{2^n}$