Exercices - Chapitre 9 - Algèbre bilinéaire II

Exercice 1
Soit $\big(E,\langle .,. \rangle\big)$ un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 2, u un vecteur de E non nul, α un réel non nul.
On considère l'application f définie sur E par :

$$\forall x \in E \qquad f(x) = x + \alpha \langle x, u \rangle u$$

1. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de $\big(E,\langle .,. \rangle\big)$.
2. (a) Montrer que 1 est une valeur propre de f et préciser la dimension du sous-espace propre associé.
   (b) Déterminer $f(u)$.
3. En déduire que l'endomorphisme f est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.
4. On dit qu'un endomorphisme φ est une isométrie lorsque $\forall x \in E\ ||\varphi(x)|| = ||x||$.
   Montrer que f est une isométrie si et seulement si $2 + \alpha ||u||^2 = 0$.

Exercice 2
Une matrice nilpotente

Soit A une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telle que A^3 soit la matrice nulle.

1. Montrer que la seule valeur propre possible, pour la matrice A est 0.
2. En déduire que A est la matrice nulle.

Exercice 3
Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension supérieure ou égal à 1. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.
Pour tout x de E on note : $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k$.

1. (a) Montrer que f est un endomorphisme de E.
   (b) Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.
   (c) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. L'application f est-elle injective?
   (d) Montrer que f est surjective.
2. Montrer que les valeurs propres de f sont strictement positives.
3. On note A la matrice de f dans la base $(e_1, \cdots, e_n)$.
   (a) Montrer qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale de coefficients diagonaux strictement positifs, telles que $A = PD\,{}^tP$.
   (b) Montrer qu'il existe une unique matrice Δ diagonale de coefficients diagonaux strictement positifs telle que $D = \Delta^2$.
   (c) On pose $S = P\Delta^{-1}\,{}^tP$. Déterminer $S^2 A$.
   (d) En déduire qu'il existe un automorphisme s de E à valeurs propres strictement positives tel que $s = (s \circ f)^{-1}$

Exercice 4
Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.
Montrer que

$$Sp(M) \subset \mathbb{R}_+ \ \Leftrightarrow\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad {}^tX.M.X \geq 0$$

Exercice 5
Une forme quadratique

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix}$.

On pose pour tout triplet (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, $q(x, y, z) = (x, y, z) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

1. Donnez l'expression de $q(x, y, z)$ pour tout triplet (x, y, z) de réels.
2. Ecrire pour tout vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$, $q(x, y, z)$ sous la forme d'une somme de carrés.
3. Etudier le signe de q.

Exercice 6
Orthodiagonalisation de matrices symétriques

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, noté f, dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que f est un endomorphisme diagonalisable.
2. (a) Justifier que la matrice $A + I$ n'est pas inversible.
   (b) Calculer AT. En déduire une valeur propre de A.
3. Déterminer une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ orthogonale et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PD\,{}^tP$.

Exercice 7
On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, noté f, dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Justifier que f est un endomorphisme diagonalisable.
2. (a) Déterminer le rang de la matrice $A + I$.
   (b) En utilisant la trace de la matrice A en déduire le spectre de la matrice A.
3. Déterminer une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ orthogonale et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PD\,{}^tP$.

Exercice 8
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2.
2. En déduire le spectre de la matrice A.
3. Déterminer une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ orthogonale et une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale telles que $A = PD\,{}^tP$.

Exercice 9
Soit E un espace euclidien et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.
Soit f est un automorphisme de E, et on note M sa matrice associée dans une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E.

1. Montrer que ${}^tMM$ est une matrice symétrique de valeurs propres strictement positives.
2. En déduire qu'il existe une matrice symétrique à valeurs propres strictement positives S telle que ${}^tMM = S^2$.
3. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale O telle que $M = OS$.

Exercice 10
Plus petite et plus grande valeur propre d'un endomorphisme symétrique
Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
On considère $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique $\langle . \rangle$ et on note $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Soit f un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}^n$ dont la matrice dans la base canonique est notée $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.
On note q la forme quadratique associée à la matrice A.
On appelle quotient de Rayleigh, l'application définie sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\} \quad r(x) = \frac{\langle f(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

1. Justifier qu'il existe n réels, distincts ou non $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ et une base orthonormale

   $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tels que : $\forall i \in [[1, n]]$, $f(\epsilon_i) = \lambda_i \epsilon_i$

   On suppose dans toute la suite de l'exercice que $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.
2. (a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\} \quad \lambda_1 \leq r(x) \leq \lambda_n$.

   (b) Justifier que λ_1 et λ_n sont, en fait, le minimum et le maximum de la fonction r sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$
3. On se propose de montrer que les seuls vecteurs x qui vérifient $r(x) = \lambda_1$ sont les vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ_1

   On note p la dimension de $\mathrm{Ker}(f - \lambda_1 Id_{\mathbb{R}^n})$: on a donc $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p$ et $(\epsilon_1, \dots \epsilon_p)$ est une base de $Ker(f - \lambda_1 Id_{\mathbb{R}^n})$.
   On considère un vecteur $x \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ tel que $r(x) = \lambda_1$.
   On note $x = \sum_{k=1}^n x_k \epsilon_k$ la décomposition de x dans la base $\mathcal{B}$.

   (a) Montrer que : $\sum_{k=p+1}^n x_k^2 (\lambda_k - \lambda_1) = 0$.

   (b) Conclure.

Exercice 11
Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire $\langle . \rangle$ et de la norme associée $\|.\|$.
Soit p et r deux projecteurs orthogonaux distincts de E qui commutent.

1. Montrer que $p \circ r$ est un projecteur orthogonal.
2. Dans le cas où $p \circ r$ est non nul, déterminer ses valeurs propres.
3. Montrer que $Ker(p \circ r) = Ker(p) + Ker(r)$ et $Im(p \circ r) = Im(p) \cap Im(r)$.

Exercice 12
Des projecteurs orthogonaux dans $\mathbb{R}^n$

1. *Reconnaître un projecteur orthogonal*

   On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique. On considère un endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

   Montrer que f est un projecteur orthogonal que l'on précisera.
2. *projeté orthogonal,recherche d'extrema*

   On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire canonique.

   On note $f_1 = (1, 2, 0, -2)$, $f_2 = (2, 0 - 2, 1)$ et $F = Vect(f_1, f_2)$.

   (a) On note $a = (-2, 1, 1, 3)$. Déterminer le projeté orthogonal du vecteur a sur F.

   (b) Déterminer la matrice du projecteur orthogonal sur F dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

   (c) On note $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ $h(x, y) = (2 + x + 2y)^2 + (1 - 2x)^2 + (1 + 2y)^2 + (3 + 2x - y)^2$.

      i. Soit $u = xf_1 + yf_2$ un vecteur quelconque de F. Montrer que $h(x, y) = ||a - u||^2$.

      ii. En déduire que la fonction h admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ atteint en un unique couple (x_0, y_0) que l'on déterminera.

      iii. Faire le lien avec le théorème des pseudos-solutions.

Exercice 13
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et soit $E = \mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout (P, Q) de E^2, on note :$\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\, dt$.
On note $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $h(a, b) = \int_0^{+\infty} (t^2 - at - b)^2 e^{-t} dt$.
On admet que pour tout $(P, Q) \in E^2$, $< P, Q >$ est bien défini et que $\langle ., . \rangle$ est un produit scalaire sur E (cf Chapitre précédent).

1. Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.
2. En déduire que la fonction h admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et préciser ce minimum.