Preuve du Théorème I.4 du Chapitre 9 (Algèbre bilinéaire II)

On admet que tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E admet au moins une valeur propre

Montrons que si f est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, alors f est diagonalisable dans une base orthonormée.
Pour cela, on raisonne par récurrence forte sur la dimension de l'espace E.

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition :
$\mathcal{H}(n)$: "tout endomorphisme symétrique f d'un espace euclidien E de dimension inférieure ou égale à n est diagonalisable dans une base orthonormée".

- Initialisation : si $n = 1$, soit E un espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. La matrice de f dans n'importe quelle base (e) de E est diagonale, donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier fixé tel que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.
Soit E un espace euclidien de dimension $n+1$ et f un endomorphisme symétrique de E.
D'après le résultat admis ci-dessous, f admet une valeur propre λ. Notons $E_\lambda = Ker(f - \lambda.Id)$ le sous-espace propre associé.
Si $E_\lambda = E$, alors $f = \lambda.Id_E$ et sa matrice dans n'importe quelle base de E est diagonale.
Supposons que $E_\lambda \neq E$. Alors $\dim(E_\lambda) = r$ où $1 \leq r \leq n$, et on considère $(e_1, \cdots, e_r)$ une BON de E_λ. Comme E_λ est stable par f et f est symétrique, d'après une remarque du cours $E_\lambda^\perp$ est également stable par f. On considère alors l'application $g = f|_{E_\lambda^\perp}$. Comme $E_\lambda^\perp$ est stable par f, l'application g est un endomorphisme de $E_\lambda^\perp$. g est encore symétrique puisqu'il s'agit de la restriction d'un endomorphisme symétrique (facile à vérifier).
Comme $\dim(E_\lambda^\perp) = n + 1 - r \leq n$, par hypothèse de récurrence l'application g est diagonalisable dans une BON $(e_{r+1}, ..., e_{n+1})$: il existe une BON $(e_{r+1}, ..., e_{n+1})$ de $E_\lambda^\perp$ formée de vecteurs propres de g, qui sont donc également des vecteurs propres de f.
On obtient alors par concaténation des deux bases de E_λ et $E_\lambda^\perp$ une BON $(e_1, e_2, \cdots, e_{n+1})$ de E formée de vecteurs propres de f.
L'application f est donc diagonalisable dans une BON.

- Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la proposition $\mathcal{H}(n)$ est vraie.