Corrigé du DS4 - Lundi 15 janvier 2024

Problème 1 :

Partie 1

1. (a) Pour tout $x \in [0; +\infty[$,

$$H(x) = P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$$

La fonction f est continue sur $[0; +\infty[$. La fonction F est alors une primitive de f sur cet intervalle, donc $F \in \mathcal{C}^1([0; +\infty[)$. On en déduit que $H \in \mathcal{C}^1([0; +\infty[)$ et que de plus,

$$\forall x \geq 0,\ H'(x) = -F'(x) = -f(x)$$

(b) Soit $x \in [0, +\infty[$ et $I = \int_0^x t.f(t).dt$. Posons

$$\left\{\begin{array}{l} u(t) = t \\ v'(f) = f(t) \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} u'(t) = 1 \\ v(f) = -H(t) \end{array}\right.$$

Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; x]$, on peut intégrer par parties et :

$$\begin{aligned} \int_0^x tf(t)dt &= [-tH(t)]_0^x + \int_0^x H(t)dt \\ &= -xH(x) + \int_0^x H(t)dt \\ &= -xP(X > x) + \int_0^x P(X > t)dt \end{aligned}$$

Bilan : $\forall x \geq 0$, $\boxed{\int_0^x tf(t)dt = -xP(X > x) + \int_0^x P(X > t)dt}$

2. On suppose ici que X admet une espérance.

(a) On remarque d'abord que

$$xP(X > x) = x.\int_x^{+\infty} f(t)dt = \int_x^{+\infty} x.f(t)dt$$

De plus, pour tout $t \in [x; +\infty[$, $x.f(t) \leq t.f(t)$. Comme $E(X)$ existe, l'intégrale $\int_x^{+\infty} t.f(t)dt$ converge. On a alors

$$0 \leq xP(X > x) \leq \int_x^{+\infty} t.f(t)dt$$

Enfin, comme $\int_0^{+\infty} t.f(t)dt$ converge (il s'agit de $E(X)$), son reste tend vers 0 : $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{+\infty} t.f(t)dt = 0$.
Par le théorème des gendarmes, on a alors $\lim_{x\to+\infty} x \cdot P(X > x) = 0$.

(b) En passant à la limite dans le résultat de la partie 1.b), on trouve alors que

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x P(X > t)dt = \int_0^{+\infty} t.f(t)dt = E(X)$$

Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} P(X > t)dt$ converge et $\boxed{E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > t).dt}$

3. On suppose ici que $\int_0^{+\infty} P(X > t).dt$ converge.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $-xP(X > x) \leq 0$ donc d'après le 1.b),

$$\int_0^x t.f(t)dt \leq \int_0^x P(X > t)dt \leq \int_0^{+\infty} P(X > t)dt$$

La fonction $G : x \mapsto \int_0^x t.f(t)dt$ est alors croissante sur $\mathbb{R}_+$ (car de dérivée $G'(x) = x.f(x) \geq 0$) et majorée. Elle tend donc vers une limite finie sur $x \to +\infty$, ce qui signifie que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t.f(t)dt$ converge. Ainsi $\boxed{X \text{ admet une espérance}}$

On a donc établi que, dans le cas étudié :
$\boxed{X \text{ admet une espérance ssi } \int_0^{+\infty} P(X > t).dt \text{ converge}}$ et dans ce cas, $\boxed{E(X) = \int_0^{+\infty} P(X > t).dt}$

Partie 2

1. Soit $t \in]0; +\infty[$ fixé .
On note Y_t la variable aléatoire égale au nombre de visiteurs arrivant avant le temps t.

(a) La probabilité pour que le visiteur 1 arrive avant le temps t est :

$$P(X_1 \leq t) = F_{X_1}(t) = 1 - e^{-t}$$

(b) On reconnait un processus de Bernoulli :

- Epreuve $\mathcal{E}$: on considère un visiteur
- Succès : il arrive avant le temps t, de probabilité $p = 1 - e^{-t}$
- Y_t est la variable égale au nombre de succès lorsque l'on répète n fois l'épreuve $\mathcal{E}$ de façon identique et indépendante.

Bilan : $\boxed{Y_t \text{ suit la loi binômiale } \mathcal{B}(n, 1 - e^{-t})}$

(c)

$$\begin{aligned} F_r(t) &= P(T_r \leq t) = P(Y_t \geq r) \\ &= 1 - P(Y_t < r) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} P(Y_t = k) \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} (1 - e^{-t})^k.(e^{-t})^{n-k} \\ &= 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} \left(1 - e^{-t}\right)^k.e^{-t(n-k)} \end{aligned}$$

2. (a) $T_r(\Omega) = \mathbb{R}_+$ et la variable T_r a pour fonction de répartition :

$$F_{T_r} : t \mapsto \left\{\begin{array}{l} 0 \text{ si t<0} \\ 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} \left(1 - e^{-t}\right)^k.e^{-t(n-k)} \text{ si } t \geq 0 \end{array}\right.$$

Cette fonction est nulle donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$. De plus, il s'agit sur $]0; +\infty[$ de la composée de la fonction $t \mapsto e^{-t}$ et d'une fonction polynômiale, donc F_{T_r} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$. La fonction est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0.
Elle est donc continue sur $\mathbb{R}^*$. De plus, en 0,

$$F_{T_r}(0) = 1 - \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} 0^k = 1 - \binom{0}{0} 0^0 = 1 - 1 = 0$$

(attention à ne pas oublier le terme en $k=0$!!).
Donc F_{T_r} est également continue en 0 et finalement continue sur $\mathbb{R}$.
Bilan : $\boxed{\text{la variable } T_r \text{ est bien à densité}}$

(b) Comme T_r est l'heure d'arrivée du r-ième arrivant, il est évident que T_r est inférieur à la somme de toutes les heures d'arrivée, donc

$$0 \leq T_r \leq S = X_1 + \cdots + X_n$$

Comme toutes les variables X_k admettent une espérance, il en est de même de leur somme S. Enfin, par domination, la variable T_r admet une espérance.
Bilan : $\boxed{T_r \text{ admet une espérance}}$

3. Pour tout couple $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on pose $J(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^p \cdot (1-x)^q \cdot dx$.

(a) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. Alors $J(p,q+1) = \int_0^1 x^p \cdot (1-x)^{q+1} \cdot dx$. Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x) = (1-x)^{q+1} \\ v'(x) = x^p \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u'(x) = -(q+1).(1-x)^q \\ v(x) = \frac{1}{p+1}.x^{p+1} \end{array} \right.$$

Les fonctions u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, on peut intégrer par parties et :

$$\begin{aligned} J_{p,q+1} &= [(1-x)^{q+1}.\frac{1}{p+1}.x^{p+1}]_0^1 + \frac{q+1}{p+1}.\int_0^1 x^{p+1}.(1-x)^q \\ &= \frac{q+1}{p+1}.J_{p+1,q} \end{aligned}$$

(b) Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. On a alors par "descente" :

$$\begin{aligned} J(p,q) &= \frac{q}{p+1}.J_{p+1,q-1} \\ &= \frac{q}{p+1}.\frac{q-1}{p+2}J_{p+2,q-2} \\ &= \frac{q}{p+1}.\frac{q-1}{p+2}.\cdots.\frac{1}{p+q}.J_{p+q,0} \end{aligned}$$

Or $J_{p+q,0} = \frac{1}{p+q+1}$ (facile) donc

$$J_{p,q} = \frac{q!}{(p+1).(p+2).\cdots.(p+q+1)}$$

Bilan : $\boxed{\text{pour tout } (p,q) \in \mathbb{N}^2, J(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}}$

Remarque : calcul d'intégrales archi-classique : prendre les points !!!

4. Soit $k \in [\![0; r-1]\!]$. Posons $x = e^{-t}$.
(1) La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ strictement décroissante, bijective de $[0;+\infty[$ sur $]0,1]$.
(2) Bornes : $\left\{ \begin{array}{l} t = 0 \\ t = +\infty \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \; x = 1x = 0 \right.$
(3) $dx = -e^{-t}dt$
(4) $(1-e^{-t})^k.e^{-t(n-k)}dt = (1-e^{-t})^k.e^{-tn+tk+t}.e^{-t}dt = (1-x)^k.x^{n-k-1}.(-dx)$

Donc enfin par changement de variables, l'intégrale $A_{n,k}$ est de même nature et égale s'il y a convergence à

$$\int_1^0 (1-x)^k.x^{n-k-1}.(-dx) = \int_0^1 (1-x)^k.x^{n-k-1}.dx = J_{n-k-1,k}$$

Bilan : $\boxed{\text{l'intégrale } A_{n,k} \text{ converge et } A_{n,k} = \frac{k!.(n-1-k)!}{n!}}$

5. On sait déjà que $E(T_r)$ existe. D'après le résultat de la partie 1, on a alors

$$\begin{aligned} E(T_r) &= \int_0^{+\infty} P(T_r > t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} 1 - F_r(t)dt \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k} \left(1-e^{-t}\right)^k.e^{-t(n-k)}dt \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} \binom{n}{k}.A_{n,k} \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{n!}{k!.(n-k)!}.\frac{k!.(n-1-k)!}{n!} \\ &= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{n-k} \end{aligned}$$

6. **Python** : répondre sur la feuille annexe.

Partie 3

1. On commence par une loi de Max hyper-classique !!
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $V_n(\Omega) = \mathbb{R}_+$.
Si $x < 0$, $F_{V_n}(x) = 0$.
Si $x \geq 0$ alors

$$\begin{aligned} F_{V_n}(x) &= P(Max(X_1, \cdots, X_n) \leq x) \\ &= P(\cap_{k=1}^n [X_k \leq x]) \\ &= \prod_{k=1}^n P(X_k \leq x) \text{ par indépendance mutuelle de } \; X_1, \cdots, X_n \\ &= (1-e^{-x})^n \end{aligned}$$

Bilan : V_n a pour fonction de répartition :

$$F_{V_n} : x \mapsto \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } x < 0 \\ (1-e^{-x})^n \text{ si } x \geq 0 \end{array} \right.$$

Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 (détailler un peu...). De plus, elle est continue en 0 puisque $\lim_{x \to 0}(1-e^{-x})^n = 0$; F_{V_n} est donc continue sur $\mathbb{R}$. Donc V_n est bien à densité. On obtient une densité en dérivant F_{V_n} partout sauf en 0 et en donnant en 0 une valeur arbitraire (on choisit : 0):

$$f_{V_n} : x \mapsto \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ n.e^{-x}.(1-e^{-x})^{n-1} \text{ si } x > 0 \end{array} \right.$$

2. (a) Nous sommes bien dans les conditions d'application de la formule de la Partie 1. Sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned}
E(V_n) &= \int_0^{+\infty} P(V_n > x)dx \\
&= \int_0^{+\infty} 1 - F_{V_n}(x)dx \\
&= \int_0^{+\infty} 1 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.(-e^{-x})^k \quad \text{avec la formule du binôme} \\
&= -\int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.(-e^{-x})^k \quad \text{en simplifiant les premiers termes} \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.(-1)^k. \int_0^{+\infty} e^{-kx}dx
\end{aligned}$$

Toutes ces intégrales sont convergentes car $k > 0$. Donc $E(V_n)$ existe bien, et de plus

$$E(V_n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.(-1)^{k+1}.\frac{1}{k}$$

<u>Bilan :</u> $\boxed{V_n \text{ admet une espérance et que } E(V_n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.}$

$$\begin{aligned}
E(V_{n+1}) - E(V_n) &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k}.(-1)^{k+1}.\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}.(-1)^{k+1}.\frac{1}{k} \\
&= \binom{n+1}{n+1}.\frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}).(-1)^{k+1}.\frac{1}{k} \\
&= \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(\binom{n+1}{k} - \binom{n}{k}).(-1)^{k+1}.\frac{1}{k} \\
&= \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \sum_{k=1}^{n}(\binom{n}{k-1}).(-1)^{k+1}.\frac{1}{k} \quad \text{formule de Pascal} \\
&= \frac{(-1)^{n+2}}{n+1} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(\binom{n+1}{k}).(-1)^{k+1} \quad \text{transformation classique} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}(\binom{n+1}{k}).(-1)^{k+1} \quad \text{on réinjecte le terme dans la somme} \\
&= \frac{1}{n+1}.(\sum_{k=0}^{n+1}(\binom{n+1}{k}).(-1)^{k+1} + 1) \\
&= \frac{1}{n+1}.(-(1-1)^{n+1} + 1) \quad \text{binôme} \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

OUF !!

(b) Question plus facile !
Pour tout $k \in [[0, n]]$, $E(V_{k+1}) - E(V_k) = \frac{1}{k+1}$. D'où en sommant pour k variant de 1 à $n-1$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1} E(V_{k+1}) - E(V_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \\
\Leftrightarrow \quad & E(V_n) - E(V_1) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{par télescopage et décalage d'indice} \\
\Leftrightarrow \quad & E(V_n) = E(V_1) + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Or $E(V_1) = E(X_1) = 1$, d'où le résultat :

<u>Bilan :</u> $\boxed{E(V_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$

(c) Si l'on prend $r = n$ dans la Partie 2, question 5. b), la variable T_n est alors égale à l'heure de visite la plus grande, c'est-à-dire au maximum de X_1, ..., X_n. Ainsi $T_n = V_n$, et on a bien

$$E(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n-k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = E(V_n)$$

en posant $i = n - k$.

3. (a) *Question classique d'analyse déjà vue, à savoir refaire !!*
On rappelle le DL en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1+u)$:

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o_{u\to 0}(u^2)$$

Comme $\lim_{k\to+\infty} -\frac{1}{k} = 0$, on a alors pour tout $k \geq 2$,

$$\ln(1 - \frac{1}{k}) = -\frac{1}{k} - \frac{1}{2}.\frac{1}{k^2} + o_{k\to+\infty}(\frac{1}{k^2})$$

On a alors

$$u_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k} - \frac{1}{2}.\frac{1}{k^2} + o_{k\to+\infty}(\frac{1}{k^2}) = -\frac{1}{2}.\frac{1}{k^2} + o_{k\to+\infty}(\frac{1}{k^2})$$

donc $u_k \sim_{k\to+\infty} -\frac{1}{2}.\frac{1}{k^2}$. Comme la série de terme général $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), par critère d'équivalence (séries à termes négatifs),
$\boxed{\text{la série de terme général } u_k \text{ converge}}$

(b) On remarque que si $n \geq 2$,

$$A_n - A_{n-1} = -\ln(n) + \ln(n-1) + \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \ln(1 - \frac{1}{n}) = u_n$$

En sommant cette égalité pour k variant de 2 à n, on obtient par télescopage

$$A_n - A_1 = \sum_{k=2}^{n} u_k$$

et enfin

$$\lim_{n\to+\infty} A_n = A_1 + \sum_{k=2}^{+\infty} u_k$$

et la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien convergente. On note C sa limite .

(c) On remarque que $E(V_n) = A_n + \ln(n)$, donc

$$\frac{E(V_n)}{\ln(n)} = \frac{A_n}{\ln(n)} + 1 \to_{n\to+\infty} 1$$

puisque $\lim_{n\to+\infty} A_n = C$. Donc $\boxed{E(V_n) \sim_{n\to+\infty} \ln(n)}$

(d) *Question cadeau !!*

```
n=int(input("Entrer n :"))
S=0
for k in range(1,n+1):
    S=S+1/k
A=S+1/n
print (A)
```

ou la version compacte : `A=np.sum(1/np.arange(1,n+1))+1/n`
Mais PAS DE MELANGE ENTRE LES DEUX !!

4. Etude de la variable aléatoire $V = \max(X_1, \ldots\ldots, X_N)$.

(a) Soit $x \in [0; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} P_{(N=n)}(V \leq x) &= \frac{P([N=n] \cap [V \leq x]}{P(N=n)} \\ &= \frac{P([N=n] \cap [Max(X_1, ..., X_N) \leq x]}{P(N=n)} \\ &= \frac{P([N=n] \cap [Max(X_1, ..., X_n) \leq x]}{P(N=n)} \\ &= \frac{P([N=n] \cap [V_n \leq x]}{P(N=n)} \end{aligned}$$

Comme les variables N, X_1, ..., X_n sont mutuellement indépendantes, par lemme de coalition les variables $V_n = Max(X_1, ..., X_n)$ et N sont indépendantes. D'où

$$P_{(N=n)}(V \leq x) = \frac{P([N=n]).P([V_n \leq x])}{P(N=n)} = P(V_n \leq x)$$

(b) On note F_V la fonction de répartition de la v.a.r. V.
Soit $x \in [0; +\infty[$. D'après la FPT dans le SCE $([N=n])_{n\in\mathbb{N}^*}$, on a :

$$\begin{aligned} F_V(x) &= P(V \leq x) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n).P_{N=n}(V \leq x) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{2})^n.P(V_n \leq x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{2})^n.(1-e^{-x})^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1-e^{-x}}{2})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1-e^{-x}}{2})^n - 1 \\ &= \frac{1}{1-\frac{1-e^{-x}}{2}} - 1 \text{ car } |\frac{1-e^{-x}}{2}| < 1 \\ &= \frac{2}{1+e^{-x}} - 1 = \frac{2-1-e^{-x}}{1+e^{-x}} \\ &= \frac{1+e^{-x}-2e^{-x}}{1+e^{-x}} \\ &= 1 - \frac{2 \cdot e^{-x}}{1+e^{-x}} \end{aligned}$$

On admet que V est à densité (facile à montrer mais déjà fait 2 fois !! je vous épargne la 3ème !!)

(c) D'après la Partie 1, sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{+\infty} P(V > x)dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2e^{-x}}{1+e^{-x}}dx \\ &= \lim_{A\to+\infty} [-2\ln(1+e^{-x})]_0^A \\ &= 2\ln(2) \end{aligned}$$

(pas très rigoureux mais si vous êtes arrivés jusqu'ici ça passe !!)

<u>Bilan :</u> $\boxed{V \text{ admet une espérance et } E(V) = 2\ln(2)}$

(d) La variable V admet une espérance et est à valeurs positives. D'après l'inégalité de Markov :

$$\forall \epsilon > 0, \quad P(V \geq \epsilon) \leq \frac{E(V)}{\epsilon}$$

d'où avec $\epsilon = 2^n$ et $E(V) = 2\ln(2)$:

$$P(V \geq 2^n) \leq \frac{\ln(2)}{2^{n-1}}$$

Problème 2 : endomorphismes antisymétriques

Partie 1 : étude d'un exemple

Dans cette partie, on note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2 .

1. On pose pour tout $(P, Q) \in E^2$,

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=-1}^{1} P(k) \cdot Q(k)$$

Montrons que $\langle ., . \rangle$ est bien un produit scalaire sur E.
1. Il est clair que $\langle ., . \rangle$ va de E^2 dans $\mathbb{R}$.
2. Pour tout $(P, Q) \in E^2$,

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=-1}^{1} P(k) \cdot Q(k) = \sum_{k=-1}^{1} Q(k) \cdot P(k) = \langle Q, P \rangle$$

donc $\langle ., . \rangle$ est symétrique.
3. Pour tout $(P, Q, R) \in E^3$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \langle \alpha.P + Q, R \rangle &= \sum_{k=-1}^{1} (\alpha.P(k) + Q(k)).R(k) \\ &= \alpha. \sum_{k=-1}^{1} P(k).R(k) + \sum_{k=-1}^{1} Q(k).R(k) \\ &= \alpha. \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle \end{aligned}$$

donc $\langle .,. \rangle$ est linéaire à gauche. Etant symétrique, $\langle .,. \rangle$ est bilinéaire.
4. Pour tout $P \in E$,

$$\langle P, P \rangle = \sum_{k=-1}^{1} (P(k))^2 \geq 0$$

De plus,

$$\langle P, P \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=-1}^{1} (P(k))^2 = 0 \Leftrightarrow P(-1)^2 = P(0)^2 = P(1)^2 = 0 \Leftrightarrow P(-1) = P(0) = P(1) = 0$$

puisqu'une somme de termes positifs est nulle ssi tous les termes sont nuls.
Le polynôme P appartient à $\mathbb{R}_2[X]$ et possède trois racines distinctes -1, 0 et 1. Donc nécessairement $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. L'application $\langle .,. \rangle$ est donc définie positive.

Bilan : $\boxed{\text{l'application } \langle .,. \rangle \text{ est bilinéaire, symétrique, définie positive, il s'agit donc d'un produit scalaire sur } E}$

2. On considère l'application f définie sur E par $f(P) = 2P'(0) \cdot X^2 - (P(1) + P(-1)) \cdot X$.
   (a)
   - Soit $P \in E$. Alors $P'(0) \in \mathbb{R}$, $P(-1) + P(1) \in \mathbb{R}$, et donc $2P'(0) \cdot X^2 - (P(1) + P(-1)) \cdot X \in E$. Ainsi f va bien de E dans E.
   - On montre facilement la linéarité de f.
   - Bilan : $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E}$

   (b)

$$f(1) = 2.0.X^2 - (1+1).X = -2X$$
$$f(X) = 2.X^2 - 0.X = 2X^2$$
$$f(X^2) = 2.2.0.X - 2X = -2X$$

   Donc

$$A = Mat_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   (c) Soit $P \in E$: $P = aX^2 + bX + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Alors $P' = 2aX + b$ et

$$2P'(0) - P(1) + P(-1) = 2b - (a + b + c) + (a - b + c) = 2b - 2b = 0$$

   Donc $2P'(0) = P(1) - P(-1)$.

   (d) Soit $P \in E$.

$$\langle f(P), P \rangle = \sum_{k=-1}^{1} f(P)(k).P(k)$$

   Pour tout k, $f(P)(k) = 2P'(0).k^2 - P(1).k - P(-1).k$.
   Donc si $k = -1$, $f(P)(-1) = 2P'(0) + P(1) + P(-1) = 2P(1)$ (d'après 2.c)).
   Si $k = 1$, $f(P)(1) = 2P'(0) - P(1) - P(-1) = -2P(-1)$. D'où

$$\langle f(P), P \rangle = \sum_{k=-1}^{1} f(P)(k).P(k) = 2.P(1).P(-1) + (-2.P(-1)).P(1) = 0$$

   (Merci à Guillaume pour cette présentation très efficace !!)
   Bilan : f est un endomorphisme antisymétrique de l'espace vectoriel euclidien E.

3. Soit $P_1 = \frac{1}{2}\left(X^2 + X\right)$ et $P_2 = \frac{1}{2} f(P_1)$.

   (a) **Utilisons les matrices !**

$$Mat_{\mathcal{C}}(f^2) = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

   d'où

$$Mat_{\mathcal{C}}(f^2(P_1)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -4.Mat_{\mathcal{C}}(P_1)$$

   Ainsi $f^2(P_1) = 4P_1$.
   Donc P_1 ($\neq 0$) est un vecteur propre de f^2 associé à la valeur propre -4.
   En particulier, $P_1 = -\frac{1}{4}.f(f(P_1))$ donc $P_1 \in Im(f)$. De façon évidente, $P_2 \in Im(f)$.
   On a de plus

$$Mat_{\mathcal{C}}(f(P_1)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -0 & -2 \\ 0 & 2 & -0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   donc $P_2 = -X + X^2$.

$$\|P_1\|^2 = \langle P_1, P_1 \rangle = 0 + 0 + 1 = 1$$

   donc P_1 est normé,

$$\|P_2\|^2 = \langle P_2, P_2 \rangle = 1 + 0 + 0 = 1$$

   donc P_2 est normé,

$$\langle P_1, P_2 \rangle = 0.1 + 0.0 + 1.0 = 0$$

   donc P_1 et P_2 sont orthogonaux.
   La famille (P_1, P_2) est donc une famille orthonormée de vecteurs de $Im(f)$. En particulier cette famille est libre. Or on voit aisément que $rg(f) = rg(A) = 2$, donc $\dim(Im(f)) = 2$. Par conséquent cette famille est une base de $Im(f)$.

   Bilan : $\boxed{\text{la famille } (P_1, P_2) \text{ est une base orthonormée de } \mathrm{Im}(f)}$

   (b) Soit $P \in E$, $P = aX^2 + bX + c$. Alors $P \in Ker(f)$ ssi $f(P) = 0$, ssi

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -0 & -2 \\ 0 & 2 & -0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P = aX^2 - a = a.(X^2 - 1)$$

   Donc $Ker(f) = Vect(X^2 - 1)$. De plus,

$$\left\|X^2 - 1\right\|^2 = 0 + 1 + 0 = 1$$

   Notons $P_3 = X^2 - 1$.

   Bilan : la famille (P_3) est une BON de $Ker(f)$.

   On montre aisément que $\langle P_1, P_3 \rangle = 0$ et $\langle P_2, P_3 \rangle = 0$, donc $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont orthogonaux, c'est-à-dire que $Ker(f) \subset (Im(f))^\perp$. Comme de plus $\dim(Ker(f)) = 1$ (th. du rang) et $\dim(Im(f)^\perp) = 3 - 2 = 1$, on a bien $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{Im}(f))^\perp}$

(c) En concaténant les deux bases (P_1, P_2) de $Im(f)$ et (P_3) de $Ker(f)$, on obtient donc une BON $\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3)$ de E. De plus,

$$f(P_1) = 2P_2, \quad f(P_2) = 2f^2(P_1) = 2.(-4P_1) = -2P_1 \quad \text{et} f(P_3) = 0$$

On a alors avec $a = 2$: $Mat_{\mathcal{B}}(f) = A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Partie 2 : endomorphismes antisymétriques de E, où $\dim(E) = 4$

1. Un deuxième exemple.

(a)
- Pour tout $x \in E$, comme $\langle x, e_1 \rangle$ et $\langle x, e_2 \rangle$ sont des réels, $f(x)$ est une combinaison linéaire d'éléments de E donc $f(x)$ appartient à E. f va donc bien de E dans E.
- La linéarité de g se déduit de la linéarité à gauche du produit scalaire.
- Pour tout $x \in E$,

$$\langle g(x), x \rangle = \langle \langle x, e_1 \rangle . e_2 - \langle x, e_2 \rangle . e_1, x \rangle = \langle x, e_1 \rangle . \langle e_2, x \rangle - \langle x, e_2 \rangle . \langle e_1, x \rangle = 0$$

Donc g est bien un endomorphisme antisymétrique de E.
- Comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E, on obtient immédiatement

$$g(e_1) = e_2, \quad g(e_2) = -e_1, \quad g(e_3) = 0, \quad g(e_4) = 0$$

Donc

$$G = Mat_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$Im(g) = Vect(g(e_1), g(e_2), g(e_3), g(e_4)) = Vect(e_1, e_2)$$

Par le théorème du rang, on en déduit que $\dim(Ker(g)) = 2$. Or $g(e_3) = g(e_4) = 0$, donc $Vect(e_3, e_4) \subset Ker(g)$. Comme $\dim(Vect(e_3, e_4)) = 2 = \dim(Ker(g))$, on en déduit que $Ker(g) = Vect(e_3, e_4)$.

Bilan : $\boxed{Im(g) = Vect(e_1, e_2) \text{ et } Ker(g) = Vect(e_3, e_4)}$

(c)

$$Mat_{\mathcal{B}}(g^2) = G^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $g^2(e_1) = -e_1$, $g^2(e_2) = -e_2$, $g^2(e_3) = 0$, $g^2(e_4) = 0$. Comme $Im(g) = Vect(e_1, e_1)$ et $(Im(g))^\perp = Vect(e_3, e_4)$, on a bien $\boxed{g^2 = -P_{Im(g)}}$

Dans la suite f est un endomorphisme non nul antisymétrique de E où $\dim E = 4$.

2. Question classique, faite en TD !!
Pour tout $(x, y) \in E^2$,

$$\begin{aligned} \langle f(x+y), x+y \rangle &= \langle f(x) + f(y), x+y \rangle \\ &= \langle f(x), x \rangle + \langle f(x), y \rangle + \langle f(y), x \rangle + \langle f(y), y \rangle \\ &= \langle f(x), y \rangle + \langle f(y), x \rangle \end{aligned}$$

et comme $\langle f(x+y), x+y \rangle = 0$, on a bien :
$\boxed{\forall (x, y) \in E^2, \ \langle f(x), y \rangle = -\langle x, f(y) \rangle}$

3. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E et $M = Mat_{\mathcal{B}}(f)$.

Pour tout $(i, j) \in [[1, 4]]^2$, notons $(M)_{i,j}$ le coefficient de M de la i-ème ligne et j-ème colonne. D'après le cours, comme $\mathcal{B}$ est une BON,

$$\begin{aligned} (M)_{i,j} &= \langle f(e_j), e_i \rangle \\ &= -\langle e_j, f(e_i) \rangle \text{ d'après la question précédente} \\ &= -\langle f(e_i), e_j \rangle \text{ par symétrie du produit scalaire} \\ &= (-{}^tM)_{i,j} \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{\text{si } M \text{ est antisymétrique alors } {}^tM = -M}$

Remarque : la réciproque est vraie ! Mais pas demandé ici.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f et x un vecteur propre associé : $x \in E$, $x \neq 0$ et $f(x) = \lambda.x$. Alors

$$\langle f(x), x \rangle = 0 \Rightarrow \lambda. \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \text{ car } x \neq 0$$

Donc $\boxed{\text{si } \lambda \text{ est valeur propre de } f \text{ alors } \lambda = 0}$

5. Soit $x \in Ker(f)$ et $y \in Im(f)$. Il existe alors $z \in E$ tel que $y = f(z)$ et

$$\langle x, y \rangle = \langle x, f(z) \rangle = -\langle f(x), z \rangle = -\langle 0, z \rangle = 0$$

donc $x \in Im(f)^\perp$. On en déduit l'inclusion $Ker(f) \subset (Im(f))^\perp$. De plus, par le théorème du rang :

$$\dim(Ker(f) = \dim(E) - \dim(Im(f)) = \dim(Im(f)^\perp)$$

Ayant une inclusion et l'égalité des dimensions, on en déduit bien que $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = (\mathrm{Im}(f))^\perp}$
L'inclusion $Ker(f) \subset Ker(f^2)$ est facile et classique (à rédiger). Soit $x \in Ker(f^2)$. Alors $f(f(x)) = 0$, donc $f(x) \in Ker(f) \cap Im(f)$. On vient de voir que $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont supplémentaires orthogonaux, donc nécessairement $Ker(f) \cap Im(f) = \{0\}$ et $f(x) = 0$, donc $x \in Ker(f)$. Ainsi $Ker(f^2) \subset Ker(f)$. D'où le résultat par double inclusion.
Bilan : $\boxed{Ker(f^2) = Ker(f)}$

6. (a) En utilisant les matrices :

$$Mat_{\mathcal{B}}(f^2) = M^2 = (-{}^tM)^2 = {}^tM^2 = {}^tM^2$$

La matrice de f^2 dans une BON de E est symétrique, donc f^2 est un endomorphisme symétrique de E. D'après le cours, il est diagonalisable. Supposons que f^2 ait comme unique valeur propre 0. Comme f est diagonalisable, on aurait alors

$$\sum_{\lambda \ inSp(f^2)} \dim(Ker(f^2 - \lambda.Id) = \dim(E) \Leftrightarrow \dim(Ker(f^2)) = \dim(E) \Leftrightarrow Ker(f^2) = E$$

Mais on aurait alors aussi $Ker(f) = E$ (question précédente), donc $f = 0$: absurde car f est supposée non nulle.
Bilan : $\boxed{f^2 \text{ est un endomorphisme symétrique de } E}$
$\boxed{f^2 \text{ admet au moins une valeur propre non nulle}}$

(b) Soit λ une valeur propre non nulle de f^2 et u un vecteur propre de f^2 associé à λ. On a alors

$$\langle f^2(u), u \rangle = -\langle f(u), f(u) \rangle \Leftrightarrow \lambda. \|u\|^2 = -\|f(u)\|^2 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{\|f(u)\|^2}{\|u\|^2}$$

donc $\lambda < 0$.

7. On note $a=\sqrt{-\lambda}$ et $e_1=\frac{1}{\|u\|}\cdot u$ et $e_2=\frac{1}{a}f\left(e_1\right)$ et $F=\operatorname{Vect}\left(e_1,e_2\right)$.

(a)
- $$f(e_2)=\frac{1}{a}.f^2(e_1)=\frac{1}{a}.\frac{1}{\|u\|}.f^2(u)=\frac{1}{a.\|u\|}.\lambda.u=-a.e_1$$
  puisque $a=\sqrt{-\lambda}$, donc $\lambda=-a^2$.
- Il est clair que le vecteur e_1 est normé.
- $\langle e_1,e_2\rangle=\frac{1}{a}.\langle e_1,f(e_1)\rangle=0$
- $$\begin{aligned}\|e_2\|^2 &= \left\langle\frac{1}{a}f(e_1),e_2\right\rangle\\ &= \frac{1}{a}.\langle f(e_1),e_2\rangle\\ &= -\frac{1}{a}.\langle e_1,f(e_2)\rangle\\ &= -\frac{1}{a}.\langle e_1,-ae_1\rangle\\ &= \langle e_1,e_1\rangle=\|e_1\|^2=1\end{aligned}$$
- Bilan : $\boxed{\mathcal{D}=(e_1,e_2)\text{ est une famille orthonormée}}$

(b) Remarquons tout d'abord que F est stable par f, puisque $f(e_1)\in F$ et $f(e_2)\in F$.
Soit $x\in F^{\perp}$. Montrons que $f(x)\in F^{\perp}$. Pour tout $y\in F$,
$$\langle f(x),y\rangle=-\langle x,f(y)\rangle=0$$
puisque $f(y)\in F$. Donc $\boxed{F^{\perp}\text{ est stable par }f}$

(c) Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ une base orthonormée de E obtenue en complétant $\mathcal{D}$.
Comme $F^{\perp}=Vect(e_3,e_4)$ et que $F^{\perp}$ est stable par f, il existe deux réels c et b tels que $f(e_3)=ce_3+be_4$. Cependant on remarque que
$$\langle f(e_3),e_3\rangle=0\Rightarrow c.\langle e_3,e_3\rangle+b.\langle e_3,e_4\rangle=0\Rightarrow c=0$$
Donc il existe un réel b tel que $f\left(e_3\right)=be_4$.
Par un raisonnement similaire, il existe un réel d tel que $f(e_4)=d.e_3$.

Etant de plus antisymétrique, la matrice M est finalement de la forme
$$M=\begin{pmatrix}0&-a&0&0\\a&0&0&0\\0&0&0&-b\\0&0&b&0\end{pmatrix}$$
On obtient alors $rg(M)=2$ ou $rg(M)=4$ (selon que $a\neq0$ et $b\neq0$, ou que l'un des deux termes est nul).
En déduire à l'aide du 7°) la forme de la matrice $M=Mat_{\mathcal{B}}(f)$ et prouver que le rang de f est pair .

(d) Pour finir,
$$M^2=\begin{pmatrix}-a^2&0&0&0\\0&-a^2&0&0\\0&0&-b^2&0\\0&0&0&-b^2\end{pmatrix}$$
et on remarque que
$$(M^2+a^2.I).(M^2+b^2.I)=0$$
donc le polynôme $P=(X^2+a^2).(X^2.+b^2)$ est annulateur de f.

FEUILLE ANNEXE : Problème 1, Partie 2, question 6.

```
0. import numpy.random as rd
1. n=int(input("Entrer n>=2 :"))
2. r=int(input("r="))
3. t=float(input("t="))
4. X=rd.exponential(1,n) #le tableau X fournit les heures d'arrivée dans l'ordre des numéros
5. Y_t=................
6. print(Y_t)
7. for k in range(0,n-1):
8.     for i in range(1,n-k):
9.         if X[i]<X[i-1]:
10.            aux=X[i]
11.            X[i]=X[i-1]
12.            X[i-1]=aux
13. print(X)
14. T_r=............
15. print(T_r)
```

1. Compléter la ligne 5. pour déterminer la valeur prise par Y_t :

   5. np.sum(X<=t)

2. Quelle est l'action des lignes 9., 10., 11., 12. dans le script pour un indice i donné ? Répondez brièvement.

   ces instructions échangent les valeurs de X[i-1] et X[i] si elles ne sont pas dans l'ordre croissant, autrement dit elles permettent de mettre les valeurs contenues dans les deux cases X[i] et X[i-1] dans l'ordre croissant

3. Dans cette question uniquement, on suppose pour simplifier que $n=6$ et que $X=[3,8,7,2,5,5]$. On suppose également que $k=0$. Détailler ci-dessous l'action des lignes 8. à 12. sur ce tableau X (5 passages dans la boucle). Que peut-on constater quand à la dernière case de ce tableau X final ?

   X = 3, 8, 7, 2, 5, 5
   X= 3, 8, 7, 2, 5, 5
   X= 3, 7, 8, 2, 5, 5
   X= 3, 7, 2, 8, 5, 5
   X= 3, 7, 2, 5, 8,5
   X= 3, 7, 2, 5, 5, 8
   Constatation pour la dernière case du tableau X final : il s'agit de la plus grande valeur du tableau

4. Qu'affiche le script à la ligne 13. ? Compléter la ligne 14. pour afficher la valeur de T_r. Répondez brièvement.

En réitérant l'action décrite précédemment, on obtient à la ligne 13. l'affichage des valeurs de X dans l'ordre croissant (on a trié le tableau dans l'ordre croissant avec un algorithme appelé "tri par bulles").
Le tableau étant dans l'ordre croissant, pour obtenir T_r il suffit d'afficher la r-ième valeur du tableau, soit avec le décalage Python habituel : $T_r = X[r-1]$