Chapitre 8 - Algèbre bilinéaire I (tout)

1. Définition d'un produit scalaire.
2. Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$. Produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
3. Quelques produits scalaires classiques.
4. Utilisation de la bilinéarité du produit scalaire.
5. Vecteurs orthogonaux.
6. Norme associée à un produit scalaire.
   (a) Normes associées aux produits scalaires canoniques.
   (b) Propriétés d'une norme
   (c) Théorème de Pythagore
   (d) Formule de polarité
   (e) **Inégalité de Cauchy-Schwarz et cas d'égalité**
   (f) Inégalité triangulaire, inégalité triangulaire généralisée.
7. Orthogonalité
   (a) Familles orthogonales.
   (b) Th. de Pythagore généralisé
   (c) **Orthogonalité et liberté**
   Si $(u_1, \cdots, u_p)$ est une famille orthogonale de vecteurs ne contenant pas le vecteur nul, alors $(u_1, \cdots, u_p)$ est une famille libre.
8. Famille orthonormée.
9. Vecteur orthogonal à un sev, à un sev engendré. Sous-espaces orthogonaux. Deux sev orthogonaux sont en somme directe.
10. Espace eucliden : ev de dimension finie muni d'un produit scalaire.
11. Base orthonormée (B.O.N)
12. Méthode d'orthonormalisation de Schmidt : **à savoir appliquer pour deux ou trois vecteurs, la formule générale est hors-programme**.
13. Théorème de la base orthonormée incomplète.
14. Expressions dans une BON $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$:
   (a) expression d'un vecteur $u \in E$: $u = \sum_{i=1}^{n} \langle u, e_i \rangle e_i$ donc $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \langle u, e_1 \rangle \\ \langle u, e_2 \rangle \\ \cdots \\ \langle u, e_n \rangle \end{pmatrix}$ (*)

   (b) expression du produit scalaire dans une BON
   Soient $(x, y) \in E^2$, $X = Mat_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = Mat_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Alors
$$\langle x, y \rangle = {}^tX.Y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \langle y, e_k \rangle$$
   (c) expression de la norme dans une BON
   Avec les mêmes notations, $\|x\| = \sqrt{{}^tX.X} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2}$
   (d) matrice d'un endomorphisme f dans une BON
$$A = Mat_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \langle f(e_1), e_1 \rangle & \cdots & \cdots & \langle f(e_j), e_1 \rangle & \cdots & \langle f(e_n), e_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \langle f(e_1), e_i \rangle & \cdots & \cdots & \langle f(e_j), e_i \rangle & \cdots & \langle f(e_n), e_i \rangle \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \langle f(e_1), e_n \rangle & \cdots & \cdots & \langle f(e_j), e_n \rangle & \cdots & \langle f(e_n), e_n \rangle \end{pmatrix}$$
   (e) matrice de passage entre deux BON
15. Matrice orthogonale : matrice inversible telle que ${}^tP = P^{-1}$.
   Une matrice de passage entre deux BON est une matrice orthogonale.
16. Une matrice est orthogonale ssi la famille de ses vecteurs colonnes est orthonormée.
17. Supplémentaire orthogonal.
   (a) Si F est un sev de E, définition de l'orthogonal de F, noté $F^\perp$.
   (b) $F \oplus F^\perp = E$: $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F.
   (c) $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.
   (d) $(F^\perp)^\perp = F$.
   (e) Si $F \subset G$ alors $G^\perp \subset F^\perp$ (*).
   (f) La concaténation d'une BON de F et d'une BON de $F^\perp$ donne une BON de E.

Petits exercices vus en cours à savoir refaire

1. Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique.
   Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \ x + y + z + t = 0\}$.
   Démontrer très rapidement (en utilisant le produit scalaire) que F est un s.e.v. de $\mathbb{R}^4$, donner sa dimension, déterminer $F^\perp$ et une BON de $F^\perp$.
2. Dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire canonique,
   donner une base du supplémentaire orthogonal de $H = Vect((1, 1, 2, 0), (1, 2, -1, 1))$.

Chapitre 9 - Algèbre bilinéaire II (début))

1. Endomorphismes symétriques :
   (a) Définition.
   (b) Caractérisation dans des bases.
   (c) f est un endomorphisme symétrique si et seulement si sa matrice dans une BON $\mathcal{B}$ de E est symétrique.
   (d) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme symétrique. Si F est stable par f alors $F^\perp$ est stable par f(*).
   (e) Si u et v sont deux vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes λ et μ, alors u et v sont orthogonaux (*).
   (f) Les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux.
   (g) Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est orthogonale.
   (h) Si f est symétrique alors f **est diagonalisable dans une BON de** E.
2. Matrices symétriques :
   Soit A une matrice symétrique réelle.
   (a) A admet au moins une valeur propre réelle, toutes ses valeurs propres sont réelles.
   (b) A est diagonalisable.
   (c) A est orthodiagonalisable : il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = P.D.{}^tP$ où $D = Diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.
   (d) . En concaténant des BON de chaque sous-espace propre de A on obtient une BON $(X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $P = (X_1|X_2|\cdots|X_n)$ diagonalise A.
3. Forme quadratique q_A associée à une matrice symétrique A : définition uniquement.

.

(*) : **preuve exigible**