Exercices - Chapitre 10 - Vecteurs aléatoires

Exercice 1
On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 2. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n.
On extrait de cette urne successivement et sans remise deux jetons et on désignera par :
N_1 la variable aléatoire égale au numéro du premier jeton obtenu,
N_2 la variable aléatoire égale au numéro du deuxième jeton obtenu.

1. Déterminer la loi de N_1. Préciser son espérance et sa variance.
2. (a) Soient $(i,j) \in [[1,n]]^2$ Calculer $P_{(N_1=i)}(N_2=j)$.
   (b) En déduire la loi de N_2, puis comparer les lois de N_1 et N_2.
   (c) N_1 et N_2 sont-elles indépendantes ?
3. (a) Déterminer la loi conjointe du couple (N_1, N_2).
   (b) En déduire l'espérance de N_1N_2. (réponse $\frac{(n+1)(3n+2)}{12}$)
   (c) En déduire la covariance puis le coefficient de corrélation linéaire de (N_1, N_2).
   (d) En déduire la variance de $N_1 + N_2$. On donnera le résultat sous forme factorisée.

Exercice 2
Soit $p \in]0,1[$. Soient X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
Soient $U = X + Y$ et $V = X - Y$.

1. Préciser la loi de U.
2. Calculer la covariance du couple (U, V).
3. Les variables U et V sont-elles indépendantes?

Exercice 3
Loi multinômiale

On considère deux entiers naturels non nuls n et s. Une urne contient des boules numérotées de 1 à s.
Pour tout $i \in [[1,s]]$, la proportion de boules numéro i dans l'urne est égale à p_i. On suppose que $p_i \in]0,1[$. On effectue n tirages successifs d'une boule dans cette urne, avec remise à chaque fois de la boule obtenue.
Pour tout $i \in [[1,s]]$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre de boules numérotées i obtenues lors de ces n tirages.

1. Donner, pour tout i de $[[1,s]]$, la loi de X_i, son espérance et sa variance.
2. Soit $(i,j) \in [[1,s]]^2$ tel que $i \neq j$. Donner sans calcul la loi de $X_i + X_j$, ainsi que sa variance.
3. Déterminer la valeur du coefficient de corrélation linéaire de X_i et X_j (pour $i \neq j$).
   Les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes ?
4. (a) Que vaut $X_1 + X_2 + \ldots + X_s$?
   (b) En déduire l'espérance et la variance de cette variable.
5. On suppose que $s = 3$, $p_1 = p_2 = \frac{1}{4}$, et $p_3 = \frac{1}{2}$.
   On note $Z_1 = \dfrac{2}{\sqrt{n}}\left(X_3 - \frac{n}{2}\right)$ et $Z_2 = \sqrt{\dfrac{2}{n}}(X_1 - X_2)$.
   Déterminer $E(Z_1)$,$E(Z_2)$,$V(Z_1)$,$V(Z_2)$ ainsi que la covariance de (Z_1, Z_2).

Exercice 4
Soit $p \in]0,1[$. On note $q = 1 - p$. Soit n un entier naturel non nul. On considère n joueurs qui visent une cible. Chaque joueur fait deux tirs. A chaque tir, chaque joueur a une probabilité p d'atteindre la cible. On suppose que les tirs sont indépendants les uns des autres. On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible lors du premier tir et Z la variable aléatoire égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue de ses deux tirs.

1. Déterminer la loi de X et rappeler son espérance et sa variance.
2. Montrer que Z suit une loi binomiale et préciser son espérance et sa variance.
3. On note $Y = Z - X$. Que représente la variable Y? Quelle est la loi de Y ? Calculer la covariance de X et Y.

Exercice 5
Une urne contient deux boules rouges numérotées de 1 et 2, et deux boules noires. On extrait successivement avec remise des boules jusqu'à obtention d'une boule noire. On désigne par N le nombre aléatoire de boules rouges obtenues avant d'obtenir une boule noire et on désigne par X la variable aléatoire égale à la somme des points obtenus sur les boules rouges tirées.

1. Déterminer la loi de N et préciser son espérance.
2. Soit n est un entier naturel non nul. On désigne par U et D les variables aléatoires égales respectivement au nombre de numéros 1 obtenus et au nombre de numéros 2.
   (a) Déterminer les lois de U et D conditionnellement à $(N = n)$. Que peut-on dire de $U + D$?
   (b) Déterminer la loi de la variable aléatoire X sachant $(N = n)$.
   (c) Déterminer l'espérance de X
3. Ecrire un programme Scilab qui simule l'expérience aléatoire ci-dessus 10000 fois de suite, qui calcule et affiche une valeur approchée de $E(X)$.

Exercice 6
Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $p \in]0,1[$. On lance n fois une pièce dont la probabilité d'obtenir pile vaut p. On note X le nombre de fois où "PILE" est suivi de "FACE".
Soit $i \in [[1, n-1]]$. On note Z_i la v.a.r.d. égale à 1 lorsque l'on obtient la séquence " PILE puis FACE" lors des lancers numéro i et $i+1$ et qui vaut 0 sinon.

1. Exprimer X en fonction des variables aléatoires Z_i.
2. Soit $i \in [[1, n-1]]$. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de la v.a.r.d. Z_i
3. En déduire l'espérance de la variable aléatoire X.
4. (a) Soit $i \in [[1, n-2]]$. Déterminer la covariance de (Z_i, Z_{i+1}).
   (b) Soient $i \in [[1, n-2]]$ et $j \in [[2, n]]$ tels que $i + 1 < j$. Déterminer la covariance de (Z_i, Z_j).
   (c) En déduire la variance de X.

Exercice 7
On considère 3 boîtes et une infinité de jetons. On place successivement chacun des jetons, au hasard dans l'une des trois boîtes. On suppose que chaque boîte est vide au départ, et de capacité illimitée. On suppose également qu'à chaque fois qu'un jeton est placé, il l'est de façon équiprobable dans chaque boîte.
Soit Y le nombre de jetons placés lorsque, pour la première fois, deux boîtes exactement sont occupées par au moins un jeton. Soit Z le nombre de jetons placés lorsque, pour la première fois, les trois boîtes contiennent chacune au moins un jeton.

1. Calculer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, la probabilité $P(Y = k)$.
2. Calculer, pour $(k,l) \in (\mathbb{N}^*)^2$ la probabilité conditionnelle $P_{Y=k}(Z = l)$, puis en déduire la loi de Z.
3. (a) Calculer $E(Z|(Y = k))$.
   (b) Calculer $E(Z)$ de deux manières différentes.

Exercice 8
Un produit de convolution (recommandé de le chercher en entrainement à l'épreuve Maths2 !)

1. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

   Montrer que f est une densité.

2. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On suppose que X admet f pour densité et que Y suit une loi uniforme sur $[-1,1]$.

   (a) Quelle est la loi de la variable aléatoire $-Y$?

   (b) Déterminer une densité de la variable aléatoire $X - Y$.

Exercice 9
Soient a et n dans $\mathbb{N}^*$. On considère n boutiques et na clients. Chaque client entre dans une boutique et une seule choisie au hasard. On suppose que les choix des clients sont indépendants les uns des autres.

1. Pour tout i, $1 \leqslant i \leqslant n$ soit X_i la variable aléatoire égale au nombre de clients qui entrent dans la $i^{\text{ème}}$ boutique.

   (a) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_i.

   (b) Déterminer l'espérance et la variance de la variable $\sum_{k=1}^{n} X_k$.

   (c) En déduire $cov(X_i, X_j)$ pour tout $(i,j) \in [[1,n]]^2$.

2. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de boutiques qui n'ont pas eu de client. Calculer $E(Y)$.

Exercice 10
Somme de n variables à densité
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0,1]$.
On note $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
Montrer que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, une densité de S_n notée f_n vérifie $\forall \in [0,1]$, $\quad f_n(x) = \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$

Exercice 11
Les coïncidences
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux.
On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.
On vide l'urne en tirant successivement et sans remise les n boules.
Pour tout $i \in [[1,n]]$, on dit qu'il y a coïncidence au tirage numéro i lorsque la boule numéro i est obtenue au tirage numéro i.
On désigne par X_i, la variable de Bernoulli qui vaut 1 dans le cas où il y a coïncidence au tirage numéro i et 0 s'il n'y a pas coïncidence au tirage numéro i.

1. Montrer que, pour tout $i \in [[1,n]]$, le paramètre de X_i vaut $\frac{1}{n}$.

2. Soient $i \in [[1,n]]$ et $j \in [[1,n]]$ fixés tels que $i \neq j$.

   (a) Montrer que $P\left((X_i = 1) \cap (X_j = 1)\right) = \dfrac{1}{n(n-1)}$.

   (b) En déduire l'expression de $Cov(X_i, X_j)$. Les variables X_i et X_j sont-elles indépendantes?

3. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de coïncidences, au total, apparues lors de ces n tirages.

   (a) Exprimer la variable aléatoire X en fonction des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots .X_n$.

   (b) En déduire $E(X)$ puis $V(X)$.

Exercice 12
Loi trinômiale
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère n personnes qui se répartissent au hasard dans trois hôtels H_1, H_2, H_3. Pour tout $i \in \{1,2,3\}$, X_i est la VAR égale au nombre de personnes résidant à l'hôtel H_i.

1. Déterminer la loi de X_i.

2. Déterminer la loi de $X_1 + X_2$, ainsi que sa variance.

3. Calculer $Cov(X_1, X_2)$ et $\rho(X_1, X_2)$.

4. Déterminer la matrice de variance-covariance de (X_1, X_2, X_3).

5. Calculer $V(X_1 + X_2 + X_3)$.