# Corrigés - Exercices Chap. 9 : Algèbre Bilinéaire II

## Exercice 1

1.
2. (a) } Classique.

(b) Soit $(P,Q) \in E^2$.

$$\langle f(P), Q \rangle = \int_{-1}^{1} (1-t^2) f(P)(t) Q(t)\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} (1-t^2) . ((X^2-1)P)''(t) . Q(t)\, dt$$

Posons $u(t) = (1-t^2)Q(t)$ $\quad u'(t) = ((1-t^2)Q(t))'$

$v'(t) = ((t^2-1)P(t))''$ $\quad v(t) = ((t^2-1)P(t))'$

(abus de notations...)

$u$ et $v$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $[-1;1]$. Par IPP

$$\langle f(P), Q \rangle = \left[(1-t^2)Q(t).((t^2-1)P(t))'\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} ((1-t^2)Q(t))'((t^2-1)P(t))'\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} ((1-t^2)Q(t))'((1-t^2)P(t))'\, dt$$

Il est clair que par symétrie on aurait aussi

$$\langle f(Q), P \rangle = \int_{-1}^{1} ((1-t^2)Q(t))'((1-t^2)P(t))'\, dt$$

d'où $\langle f(P), Q \rangle = \langle P, f(Q) \rangle$

Donc <u>$f$ est symétrique.</u>

(c) Soit $P \in E$.

$$f(P) = (2XP + (X^2-1)P')'$$
$$= 2P + 4XP' + (X^2-1)P''$$

D'où $f(1) = 2$ ; $f(X) = 6X$ ; $f(X^2) = 12X^2 - 2$

et $\forall k \in [\![2;n]\!]$,

$$f(X^k) = 2X^k + 4kX^k + (X^2-1).\, k(k-1)X^{k-2}$$
$$= (k^2+3k+2)X^k + (-k^2+k)X^{k-2}$$

Notons $\mathcal{B}_c = (1, X, \dots, X^n)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} f(1) & f(X) & & f(X^k) & & & f(X^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & & & & 0 \\ 0 & 6 & & 0 & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & -k^2+k & & & \vdots \\ 0 & 0 & & k^2+3k+2 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 & \ddots & & -n^2+n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & n^2+3n+2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} 1 \\ X \\ \vdots \\ X^k \\ \vdots \\ X^n \end{array}$$

D'où comme cette matrice est triangulaire supérieure :

$Spec(f) = \{ k^2+3k+2 \;/\; k \in [\![0;n]\!] \}$.

Rque : $x \mapsto x^2+3x+2$ est clairement strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc les valeurs propres de $f$ sont deux à deux distinctes.

## Exercice 2

1. $\forall (x,y) \in E^2$,

$\langle f(x), y \rangle = \langle x + \alpha \langle x,u \rangle . u, \; y \rangle$

$= \langle x, y \rangle + \alpha \langle x,u \rangle . \langle u, y \rangle$

et

$\langle x, f(y) \rangle = \langle x, \; y + \alpha \langle y,u \rangle . u \rangle$

$= \langle x, y \rangle + \alpha \langle y, u \rangle \langle x, u \rangle$

Donc $\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$ : <u>$f$ est symétrique</u>

2. (a)

$x \in Ker(f - Id_E) \iff f(x) = x$

$\iff x + \alpha \langle x,u \rangle . u = x \iff \alpha \langle x, u \rangle . u = 0$

$\iff \langle x, u \rangle = 0$ car $\alpha \neq 0$ et $u \neq 0_E$

$\iff x$ est orthogonal à $u$

Donc

$Ker(f - Id) = Vect(u)^{\perp}$ : <u>$1$ est valeur propre de $f$</u>,

et <u>$\dim Ker(f-Id) = \dim Vect(u)^{\perp} = n-1$.</u>

(b) $f(u) = u + \alpha \langle u, u \rangle . u = (\alpha \|u\|^2 + 1) . u$

3. Donc $\alpha \|u\|^2 + 1$ est valeur propre de $f$, car $u \neq 0$.

De plus $\alpha \|u\|^2 + 1 = 1 \iff \alpha \|u\|^2 = 0$

$\iff \alpha = 0$ ou $u = 0$ : faux.

Donc $\lambda = \alpha \|u\|^2 + 1 \neq 1$.

Comme $\lambda$ est valeur propre de $f$, $\dim Ker(f - \lambda Id_E) \geq 1$.

D'où $\dim Ker(f - Id) + \dim Ker(f - \lambda Id) \geq n$

et $\dim Ker(f-Id) + \dim Ker(f - \lambda Id) \leq n$
(toujours vrai)

donc <u>$\dim Ker(f-Id) + \dim Ker(f - \lambda Id) = n$.</u>

Donc :
- $f$ est diagonalisable
- $Spec(f) = \{ 1, \underbrace{\alpha \|u\|^2 + 1}_{=\lambda} \}$
- $\dim Ker(f-Id) = n-1$, $\dim Ker(f - \lambda Id) = 1$.

4. $\forall x \in E$,

$\|f(x)\|^2 = \langle x + \alpha \langle x,u \rangle . u, \; x + \alpha \langle x,u \rangle . u \rangle$
$= \|x\|^2 + 2\alpha \langle x,u \rangle^2 + \alpha^2 \langle x,u \rangle^2 \|u\|^2$

Donc

$\|f(x)\|^2 = \|x\|^2 \iff (2\alpha + \alpha^2 \|u\|^2).\langle x,u\rangle = 0$

$\iff (2+\alpha\|u\|^2).\langle x,u\rangle = 0$ car $\alpha \neq 0$.

• Supposons que $f$ est une isométrie. Alors en particulier

$\|f(u)\|^2 = \|u\|^2 \iff (2+\alpha\|u\|^2).\|u\|^2 = 0$

$\iff 2+\alpha\|u\|^2 = 0$ car $u \neq 0_E$

• Supposons que $2+\alpha\|u\|^2 = 0$. Alors

$\forall x \in E,\ \|f(x)\| = \|x\|$

Bilan : $f$ est une isométrie $\iff 2+\alpha\|u\|^2 = 0$

---

**Exercice 3** : classique rapide : $A$ symétrique, $A^3 = 0$.

1. $P = X^3$ est annulateur de $A$.

$\mathrm{Spec}(A) \subset \{$racines de $P\}$ donc $\mathrm{Spec}(A) \subset \{0\}$.

2. $A$ symétrique donc diagonalisable.

$\mathrm{Spec}(A) = \{0\}$ (puisque $A$ a au moins une valeur propre)

et il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que

$A = P.\mathrm{diag}(0,\dots,0).P^{-1} = 0$.

Donc $A = 0$

**Exercice 4**

$\mathcal{B} = (e_1,\dots,e_n)$ base de $E$.

1.(a) • $f$ va bien de $E$ dans $E$.

• $\forall (x,y) \in E^2,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

$$f(\alpha x+y) = \sum_{k=1}^{n} \langle \alpha x + y, e_k\rangle.e_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha\langle x, e_k\rangle.e_k + \langle y, e_k\rangle.e_k$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle.e_k + \sum_{k=1}^{n} \langle y, e_k\rangle.e_k$$

$$= \alpha f(x) + f(y)$$

donc $f$ est linéaire.

Bilan : $f$ est un endomorphisme de $E$.

(b) $\forall (x,y) \in E^2$,

$$\langle f(x), y\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k, y\right\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle.\langle e_k, y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$$

car relation symétrique en $x$ et $y$

Donc $f$ est symétrique.

Exercice 4 (suite)

(c) Soit $x \in E$.

$x \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle . e_k = 0_E$

$\Leftrightarrow \forall k \in [\![1;n]\!], \langle x, e_k \rangle = 0$ car $\mathcal{B}$ base de $E$

$\Leftrightarrow x = 0_E$ car $x$ est orthogonal à tout vecteur de la base $\mathcal{B}$, donc à tout vecteur de $E$.

Ainsi $\underline{\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}}$ et $\underline{f \text{ est injective}}$.

(d) Comme $f$ est un endomorphisme d'un e.v. de dim. finie, $f$ injective $\Rightarrow f$ surjective.

Donc $f$ est surjective et même $\underline{f \text{ est une bijection}}$.

2. valeur propre de $f$ et $u \neq 0_E$ un vecteur propre associé à $\lambda$. Alors :

$\langle f(u), u \rangle = \langle \lambda u, u \rangle = \lambda \|u\|^2$ et d'autre part,

$\langle f(u), u \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k \rangle . e_k, u \rangle$

$= \sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k \rangle . \langle e_k, u \rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle u, e_k \rangle^2 \geq 0$

D'où $\lambda . \|u\|^2 \geq 0$. Comme $\|u\| \neq 0$, $\underline{\lambda \geq 0}$.

Enfin, comme $f$ injective, $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$ donc $\lambda \neq 0$.

Ainsi $\underline{\lambda > 0}$ : $\underline{\text{les valeurs propres de } f \text{ sont strictement positives}}$.

3. (a) Comme $f$ est symétrique, d'après le cours $f$ est diagonalisable : il existe une matrice inversible $P$ telle que :

$$A = P . \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) . P^{-1}$$
$$= P . D . P^{-1} \text{ où } \lambda_1 > 0, \dots, \lambda_n > 0$$

d'après le 2.

(b). Soit $\Delta = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$ où $\forall k \in [\![1;n]\!], \alpha_k > 0$.

Alors $\Delta^2 = D \Leftrightarrow \forall k \in [\![1;n]\!], \alpha_k^2 = \lambda_k$

$\Leftrightarrow \alpha_k = \sqrt{\lambda_k}$ car $\alpha_k > 0$.

Donc $\Delta = \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ est l'unique matrice diagonale à coeff. diagonaux $> 0$ telle que $\underline{\Delta}^2 = D$.

(c) $S^2 = P \Delta^{-1} P^{-1} . P \Delta^{-1} P^{-1} = P (\Delta^{-1})^2 P^{-1}$

D'où $S^2 A = P (\Delta^{-1})^2 P^{-1} . P \Delta^2 P^{-1} = P (\Delta^{-1})^2 \Delta^2 P^{-1} = I$

(c) Soit $s$ l'endomorphisme de $E$ tel que $Mat_{\mathcal{B}}(s) = S$.
Comme $\Delta$ est inversible, $S = P\Delta^{-1}P^{-1}$ l'est aussi et $s$ est bien un automorphisme de $E$.
De plus $S^2A = I \iff S.(SA) = I$
$$\iff s\circ(s\circ f) = Id_E$$
donc $s = (s\circ f)^{-1}$.

$\boxed{\text{Exercice 5}}$

1. $q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+y \\ x+5y-4z \\ -4y+4z\end{pmatrix}$

$= x^2 + yx + xy + 5y^2 - 4yz - 4yz + 4z^2$
$= x^2 + 5y^2 + 4z^2 + 2xy - 8yz$

2. $A$ est symétrique donc orthodiagonalisable
3. $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $q(x,y,z) = (x+y)^2 + 4(y-z)^2$
4. Donc $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $q(x,y,z) \geq 0$.

$\boxed{\text{Exercice 6}}$

1. $A$ est symétrique donc $f$ est un endomorphisme symétrique, donc <u>diagonalisable</u>.

2. (a)
$A + I = \begin{pmatrix} 1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ : matrice de rang 1, donc non inversible.

(b) $AT = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} = 2T$, donc $2 \in Spec(A)$.

3. $rg(A+I) = 1$ donc $\dim Ker(A+I) = 2$.
D'où $\dim Ker(A+I) + \dim Ker(A-2I) \geq 3$
donc $\dim Ker(A+I) + \dim Ker(A-2I) = 3$.
On en déduit que <u>$Spec(A) = \{-1; 2\}$</u>.

* Cherchons une BON de $Ker(A+I)$.
$Ker(A+I) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$.

$N_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ vérifie $\|N_1\| = 1$ et $N_1 \in Ker(A+I)$.

Procédé de Schmidt :
$R_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \langle R_2, N_1\rangle . N_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}.\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1\end{pmatrix}$

$\|R_2\| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ ; $N_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\-1\end{pmatrix}$.

$(N_1, N_2)$ est une BON de $Ker(A+I)$

* Cherchons une BON de $Ker(A-2I)$ : $Ker(A-2I) = Vect\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$
Donc $(N_3)$ où $N_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est une BON de $Ker(A-2I)$.

Donc $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ est une matrice orthogonale

telle que

$$A = P D {}^tP \quad \text{où } D = \text{Diag}(-1,-1,2).$$

Rque : vérifier sur Scilab !

## Exercice 7

1. A est symétrique donc f est un endomorphisme symétrique : <u>f est diagonalisable</u>.

2. (a)

$$A+I = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \quad . \quad rg(A+I) = 1$$

D'où $\dim Ker(A+I) = 2$

(b) Comme A est diagonalisable. $A = PDP^{-1}$

où $D = \text{Diag}(-1,1,\alpha)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

$Tr(A) = Tr(PDP^{-1}) = Tr(P^{-1}PD) = Tr(D) = -2+\alpha$

Or $Tr(A) = 6$ d'où $\underline{\alpha = 8}$.

$Spec(A) = \{-1, 8\}$.

3.

• $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in Ker(A+I)$

$\Leftrightarrow \left\{ \overset{4}{\cancel{9}}a + b + 2c = 0 \right. \Leftrightarrow b = -2a-2c$

$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a \\ -2a-2c \\ c \end{pmatrix}$ donc $Ker(A+I) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

On orthonormalise cette base :

$N_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. <u>Schmidt</u> :

puis $R_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, N_1 \right\rangle . N_1$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} . 4 . \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|R_2\| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{4}{25} + 1} = \sqrt{\frac{4}{5} + 1} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$N_2 = \frac{\sqrt{5}}{3}\begin{pmatrix} -4/5 \\ -2/5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/(3\sqrt{5}) \\ -2/(3\sqrt{5}) \\ \sqrt{5}/3 \end{pmatrix}$$

• $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in Ker(A-8I)$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5a+2b+4c = 0 \\ a-4b+c = 0 \\ 4a+2b-5c = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} c = -a+4b \\ -9a+18b = 0 \\ 9a-18b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b \\ c = 2b \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 2b \\ b \\ 2b \end{pmatrix}$

$Ker(A-8I) = Vect\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Si $N_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $(N_3)$ BON de $Ker(A-8I)$.

Par concaténation, $(N_1, N_2, N_3)$ est une BON de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Posons $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & -4/3\sqrt{5} & 2/3 \\ -2/\sqrt{5} & -2/3\sqrt{5} & 1/3 \\ 0 & 5/3\sqrt{5} & 2/3 \end{pmatrix}$

Alors $P$ est orthogonale et

$$A = P.D.{}^tP \text{ où } D = \mathrm{Diag}(-1,-1,8)$$

(Vérifié Scilab)

## Exercice 8

1. $A^2 = I$ 2. $P = X^2 - 1$ est annulateur de $A$.

$\mathrm{Spec}(A) \subset \{-1, 1\}$.

- $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A-I) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -a + d = 0 \\ -b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ b \\ a \end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}(A-I) = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

- $X \in \mathrm{Ker}(A+I) \Leftrightarrow \begin{cases} a + d = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -b \\ -a \end{pmatrix}$

$\mathrm{Ker}(A+I) = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

$\dim \mathrm{Ker}(A-I) + \dim \mathrm{Ker}(A+I) = 4$.

$\underline{\mathrm{Spec}(A) = \{-1, 1\}}$.

3. $\left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base orthogonale de $\mathrm{Ker}(A-I)$.

Posons $N_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $N_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$(N_1, N_2)$ est une BON de $\mathrm{Ker}(A-I)$.

Posons $N_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $N_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(N_3, N_4)$ est une BON de $\mathrm{Ker}(A-I)$.

Posons

$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors $P$ est orthogonale et

$$A = P.D.{}^tP \text{ où } D = \mathrm{Diag}(1, 1, -1, -1).$$

Vérifié Scilab

## Exercice 9

1. $\forall (i,j) \in [\![1; n]\!], \int_0^1 t^{i+j}\,dt = \frac{1}{i+j+1}$

2. (a) $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, h_{i,j} = \frac{1}{i+j-1} = h_{j,i}$

donc $\underline{H \text{ est symétrique réelle}}$.

(b) Soit $x=(x_0,\dots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^n$

$$\int_0^1 (x_0+x_1t+x_2t^2+\dots+x_{n-1}t^{n-1})^2\,dt$$

$$=\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} x_k^2 t^{2k} + 2\sum_{0\le i<j\le n-1} x_i x_j t^{i+j}\,dt$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1}x_k^2 + 2\sum_{0\le i<j\le n-1}\frac{1}{i+j+1}x_ix_j$$

et

$$q(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1}\cdot x_k^2 + 2\sum_{0\le i<j\le n-1}\frac{1}{i+j+1}x_ix_j$$

On a donc bien :

$$\forall x\in\mathbb{R}^n,\ q(x)=\int_0^1 (x_0+x_1t+\dots+x_{n-1}t^{n-1})^2\,dt$$

(c) Comme $t\mapsto(x_0+x_1t+\dots+x_{n-1}t^{n-1})^2$ est continue et positive, avec $0<1$, $\forall x\in\mathbb{R}^n,\ q(x)\geq 0$.

De plus $q(x)=0$ implique que $\forall t\in[0,1]$, $P(t)=x_0+x_1t+\dots+x_{n-1}t^{n-1}=0$.
le polynôme $P$ a une infinité de racines, donc $P=0_{\mathbb{R}[X]}$.
Ainsi $x=(x_0,\dots,x_{n-1})=0_{\mathbb{R}^n}$.
Par conséquent, si $x\neq 0$, on a $q(x)\neq 0$.

Bilan : $\forall x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\ q(x)>0$

3. Soit $\lambda$ une valeur propre de $H$ et $X$ un vecteur propre associé : $HX=\lambda X$ où $X\neq 0$.
Notons $X=\begin{pmatrix}x_0\\ \vdots\\ x_{n-1}\end{pmatrix}$ et $x=(x_0,\dots,x_{n-1})$.

Alors

$$q(x)={}^tXHX=\lambda\,{}^tXX=\lambda\|X\|^2.$$

Comme $q(x)>0$, on a $\lambda\|X\|^2>0$ donc $\lambda>0$ car $X\neq 0$.

Par conséquent :
- $\lambda\neq 0$ donc $0\notin Spec(H)$. $H$ est inversible
- $Spec(H)\subset\mathbb{R}_+^*$

$\boxed{\text{Exercice 10}}$

1. ${}^t({}^t\Pi.\Pi)={}^t\Pi.{}^t({}^t\Pi)={}^t\Pi.\Pi$.
Donc la matrice $A={}^t\Pi\Pi$ est symétrique.
Soit $\lambda$ une valeur propre de $A$ et $X$ un vecteur propre associé : $AX=\lambda X$ avec $X\neq 0$.
Alors $\langle X,AX\rangle=\lambda\langle X,X\rangle=\lambda\|X\|^2$. De plus
$\langle X,AX\rangle={}^tX.{}^t\Pi\Pi X=\langle\Pi X,\Pi X\rangle=\|\Pi X\|^2$ donc $\lambda\geq 0$.

Comme $f$ est un automorphisme, $\Pi$ est inversible donc $0 \notin \mathrm{Spec}(\Pi)$. Ainsi $\lambda \neq 0$ et donc $\lambda > 0$.

Bilan : $A = {}^t\Pi\Pi$ est une matrice symétique de valeurs propres strictement positives.

2. $A$ est orthodiagonalisable : il existe une matrice orthogonale $P$ telle que

$$A = PDP^{-1} = P.\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).{}^tP$$

où $\forall k \in [\![1,n]\!], \lambda_k > 0$.

Posons $S = P.\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}).{}^tP$.

Alors $S$ est symétique car

$${}^tS = {}^t({}^tP).{}^t\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}).{}^tP$$
$$= S$$

et à valeurs propres strictement positives.

De plus $S^2 = P.\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}).{}^tP.P.\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}){}^tP$

$$S^2 = P.\mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})^2.{}^tP = PD{}^tP = A$$

Bilan : il existe bien une matrice symétique $S$ avec $\mathrm{Spec}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$ telle que $S^2 = {}^t\Pi\Pi$.

3. Comme $\mathrm{Spec}(S) \subset \mathbb{R}_+^*$, $S$ est inversible.

Posons $O = \Pi S^{-1}$

Alors
$${}^tO.O = {}^t(\Pi S^{-1}).\Pi S$$
$$= {}^t(S^{-1}).{}^t\Pi.\Pi.S^{-1}$$
$$= S^{-1}.A.S^{-1} \text{ car } S \text{ symétique} \Rightarrow S^{-1} \text{ symétique.}$$

les matrices $A$ et $S$ commutent

car $AS = S^2 S = S^3 = S.S^2 = SA$.

D'où ${}^tO.O = S^{-1}.S^{-1}A = (S^2)^{-1}.A = A^{-1}.A = I$.

Bilan : $O = \Pi S^{-1}$ est orthogonale : on a bien $\Pi = OS$ où $S$ orthogonale

**Exercice 11**

1. $f$ est un endomorphisme symétique, donc est diagonalisable dans une base orthonormée : il existe une BON $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad f(\varepsilon_k) = \lambda_k \varepsilon_k$$

On suppose $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k \varepsilon_k \quad \text{où } (x_1, \dots, x_n) \neq 0_{\mathbb{R}^n}.$$

$$\langle f(x), x \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} x_k f(\varepsilon_k), \sum_{k=1}^{n} x_k \varepsilon_k \rangle$$

$$= \langle \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i \varepsilon_i, \sum_{j=1}^{n} x_j \varepsilon_j \rangle$$ ⚠ Dissocier les indices !

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i x_i x_j \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle \quad \text{par bilinéarité}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \quad \text{car } \langle \varepsilon_i, \varepsilon_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Comme $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ :

$$\lambda_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_n \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 \langle x, x \rangle \leq \langle x, f(x) \rangle \leq \lambda_n \langle x, x \rangle$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda_1 \leq \frac{\langle x, f(x) \rangle}{\langle x, x \rangle} \leq \lambda_n \quad \text{car } \underline{x \neq 0_{\mathbb{R}^n}}$$

donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \lambda_1 \leq r(x) \leq \lambda_n}$

(b) Si $x = \varepsilon_1$,

$$r(\varepsilon_1) = \frac{\langle \varepsilon_1, f(\varepsilon_1) \rangle}{\langle \varepsilon_1, \varepsilon_1 \rangle} = \lambda_1$$

Si $x = \varepsilon_n$,

$$r(\varepsilon_n) = \lambda_n.$$

Donc $\boxed{\lambda_1 = \min_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} r(x) \text{ et } \lambda_n = \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} r(x)}$

3. (a) $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$ base de $\operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{Id})$.

$$r(x) = \lambda_1 \Leftrightarrow \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} = \lambda_1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda_1) x_k^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=p+1}^{n} (\lambda_k - \lambda_1) x_k^2 = 0 \quad \text{car } \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p$$

(sous-espace propre de dimension $p$)

Comme $(\lambda_k - \lambda_1) x_k^2 \geq 0$ $(\forall k \in [\![p+1, n]\!])$,

on a $\forall k \in [\![p+1, n]\!]$, $(\lambda_k - \lambda_1) x_k^2 = 0 \Rightarrow x_k = 0$ car $\lambda_k \neq \lambda_1$.

D'où $x = \sum_{k=1}^{p} x_k \varepsilon_k \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{Id})$.

(b) Ainsi $\underset{(x \neq 0)}{r(x) = \lambda_1} \Leftrightarrow \underset{(x \neq 0)}{x \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_1 \mathrm{Id})}$

**Exercice 12**

1. * $p\circ r \in \mathcal{L}(E)$

* $(p\circ r)^2 = p^2\circ r^2$ car $p$ et $r$ commutent
$= p\circ r$ car $p$ et $r$ sont des projecteurs.

Donc $p\circ r$ est un projecteur.

* $\forall (x,y)\in E^2$,
$\langle p\circ r(x), y\rangle = \langle r(x), p(y)\rangle$ car $p$ symétrique
$= \langle x, r\circ p(y)\rangle$ car $r$ symétrique
$= \langle x, p\circ r(y)\rangle$ car $p$ et $r$ commutent.

Donc $p\circ r$ est symétrique

Bilan : $p\circ r$ est un projecteur orthogonal

2. $\mathrm{Spec}(p\circ r)\subset\{0,1\}$ car $p\circ r$ est un projecteur (donc $P = X^2 - X$ est annulateur de $p\circ r$).

Comme $p\circ r\neq 0$, $1\in\mathrm{Spec}(p\circ r)$.

Supposons que $\mathrm{Spec}(p\circ r)=\{1\}$. Comme $p\circ r$ est diagonalisable, on aurait $p\circ r = Id$.

En particulier, $p$ est surjective donc $p$ bijective (dim finie) donc $p = Id$. D'où $r = Id$. Fausse car $p\neq r$

D'où

$\mathrm{Spec}(p\circ r)=\{0,1\}$.

3. Montrons que $\mathrm{Ker}(p\circ r) = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Ker}(r)$.

* Soit $x\in \mathrm{Ker}(p)+\mathrm{Ker}(r)$ :
$\exists\, y\in\mathrm{Ker}(p)$ et $\exists\, z\in\mathrm{Ker}(r)\ /\ x = y+z$.

Alors $p\circ r(x) = p\circ r(y) + p\circ r(z)$
$= r\circ p(y) + p\circ r(z)$
$= r(0) + p(0)$
$= 0$

Donc $\mathrm{Ker}(p)+\mathrm{Ker}(r)\subset\mathrm{Ker}(p\circ r)$

* Soit $x\in\mathrm{Ker}(p\circ r)$.
Alors $x = r(x) + x - r(x)$

On a alors $p(r(x)) = p\circ r(x) = 0$
et $r(x - r(x)) = r(x) - r\circ r(x) = 0$ car $r\circ r = r$

Donc $x\in\mathrm{Ker}(p)+\mathrm{Ker}(r)$

D'où $\mathrm{Ker}(p\circ r)\subset\mathrm{Ker}(p)+\mathrm{Ker}(r)$

Bilan : $\mathrm{Ker}(p)+\mathrm{Ker}(r) = \mathrm{Ker}(p\circ r)$

3. *

L'inclusion $Im(p\circ r) \subset Im(p)$ est classique.

Comme $p\circ r = r\circ p$ on a aussi $Im(p\circ r) \subset Im(r)$.

Donc $Im(p\circ r) \subset (Im(p) \cap Im(r))$.

*

Soit $y \in Im(p)\cap Im(r)$ : $y = p(x)$ où $x\in E$

et $y = r(z)$ où $z \in E$.

Alors $p(y) = p\circ p(x) = p(x) = y$

Donc $y = p(r(z)) = p\circ r(z)$ et $y \in Im(p\circ r)$.

D'où l'inclusion $Im(p)\cap Im(r) \subset Im(p\circ r)$.

* Bilan : $Im(p\circ r) = Im(p)\cap Im(r)$

**Exercice 13**

1. $A^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

$= A$

Donc $f\circ f = f$ : $f$ est un projecteur.

${}^tA = A$ donc $f$ est symétrique.

D'après le cours, $f$ est un projecteur orthogonal.

$(x,y,z) \in Ker(f) \iff A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ 0 = 0 \\ -x+z = 0 \end{cases}$

$F = Ker(f) = Vect((1,0,1),(0,1,0))$

$Im(A) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right) = Vect\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

donc $G = Im(f) = Vect((-1,0,1))$.

$f$ est la projection orthogonale sur $G = Im(f)$

parallèlement à $G^\perp = F$.

2. $\mathbb{R}^4$, muni du p.s. canonique. + rapide BON de F

$v = p_F(a) \iff \begin{cases} v \in F \\ \text{et} \\ v - a \in F^\perp \end{cases}$

Soit $v \in F$ : $v = \alpha f_1 + \beta f_2$ où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

$v - a = (\alpha + 2\beta + 2, 2\alpha - 1, -2\beta - 1, -2\alpha + \beta - 3)$

$v - a \in F^\perp \iff \begin{cases} \langle v-a ; f_1\rangle = 0 \\ \langle v-a ; f_2 \rangle = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \alpha + 2\beta + 2 + 2(2\alpha - 1) - 2(-2\alpha + \beta - 3) = 0 \\ 2(\alpha + 2\beta + 2) - 2(-2\beta - 1) + (-2\alpha + \beta - 3) = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 9\alpha + 6 = 0 \\ 9\beta + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\frac{2}{3} \\ \beta = -\frac{1}{3} \end{cases}$

$p_F(a) = -\frac{1}{3}(2f_1 + f_2) = -\frac{1}{3}(4,4,-2,-3)$

(b)

Trop long !! BON de F

$\ast$ $v = p_F(e_1) \iff \begin{cases} v \in F \\ v - e_1 \in F^\perp \end{cases}$

$v = (\alpha+2\beta, 2\alpha, -2\beta, -2\alpha+\beta)$ où $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

$v - e_1 = (\alpha+2\beta-1, 2\alpha, -2\beta, -2\alpha+\beta)$.

$\langle v-e_1, f_1\rangle = 0 \iff (\alpha+2\beta-1)+4\alpha-2(-2\alpha+\beta)=0$
$\iff 9\alpha-1=0 \iff \alpha = 1/9$

$\langle v-e_1, f_2\rangle = 0 \iff 2(\alpha+2\beta-1)-2(-2\beta)+(-2\alpha+\beta)=0$
$\iff 9\beta-2=0 \iff \beta=\frac{2}{9}$

$p_F(e_1) = \left(\frac{5}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{4}{9}, 0\right)$

$\ast$ $v = p_F(e_2) \iff \begin{cases} v\in F \\ v-e_2\in F^\perp \end{cases}$

$v-e_2 = (\alpha+2\beta, 2\alpha-1, -2\beta, -2\alpha+\beta)$

$\langle v-e_2; f_1\rangle = 0 \iff (\alpha+2\beta)+4\alpha-2 \; -2(-2\alpha+\beta)=0$
$\iff 9\alpha-2=0 \iff \alpha=\frac{2}{9}$

$\langle v-e_2, f_2\rangle=0 \iff 2(\alpha+2\beta)-2(-2\beta)+\cancel{2}(-2\alpha+\beta)=0$
$\iff 9\beta=0 \iff \beta=0$

D'où

$p_F(e_2) = \left(\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, 0, -\frac{4}{9}\right)$

$\ast$ $v = p_F(e_3) \iff \begin{cases} v\in F \\ v-e_3\in F^\perp \end{cases}$

$v-e_3 = (\alpha+2\beta, 2\alpha, -2\beta-1, -2\alpha+\beta)$

$\langle v-e_3; f_1\rangle=0 \iff (\alpha+2\beta)+2(2\alpha)-2(-2\alpha+\beta)=0$
$\iff 9\alpha=0 \iff \alpha=0$

$\langle v-e_3; f_2\rangle=0 \iff 2(\alpha+2\beta)-2(-2\beta-1)+(-2\alpha+\beta)=0$
$\iff 9\beta+2=0 \iff \beta=-\frac{2}{9}$

$p_F(e_3) = \left(-\frac{4}{9}, 0, \frac{4}{9}, -\frac{2}{9}\right)$

$\ast$ $v = p_F(e_4) \iff \begin{cases} v\in F \\ v-e_4\in F^\perp \end{cases}$

$v-e_4 = (\alpha+2\beta, 2\alpha, -2\beta, -2\alpha+\beta-1)$

$\langle v-e_4; f_1\rangle = 0 \iff (\alpha+2\beta)+2(2\alpha)-2(-2\alpha+\beta-1)=0$
$\iff 9\alpha+2=0 \iff \alpha=-\frac{2}{9}$

$\langle v-e_4; f_2\rangle=0 \iff 2(\alpha+2\beta)-2(-2\beta)+(-2\alpha+\beta-1)=0$
$\iff 9\beta-1=0 \iff \beta=\frac{1}{9}$

Donc

$p_F(e_4) = \left(0, -\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{5}{9}\right)$

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F) = \begin{pmatrix} 5/9 & 2/9 & -4/9 & 0 \\ 2/9 & 4/9 & 0 & -4/9 \\ -4/9 & 0 & 4/9 & -2/9 \\ 0 & -4/9 & -2/9 & 5/9 \end{pmatrix}$$

${}^tA = A$ et $A^2 = A$ : <u>ok</u> !

C.

i. $u = (x+2y, 2x, -2y, -2x+y)$

$\|a-u\|^2 = \|u-a\|^2$

$= (x+2y+2)^2 + (2x-1)^2 + (-2y-1)^2 + (-2x+y-3)^2$

$= h(x,y)$.

ii. <u>Cours</u> : $\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} h(x,y) = \min_{u\in F} \|a-u\|^2$

le minimum est atteint pour $\underline{u = p_F(a)}$ uniquement.

D'après le 2., le minimum est atteint en $(x_0, y_0) = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

iii.

$h(x,y) = \left\| \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ +2 & 0 \\ 0 & -2 \\ -2 & +1 \end{pmatrix}}_{\text{rang } 2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ +1 \\ +1 \\ +3 \end{pmatrix} \right\|^2 = \|AX - B\|^2$

$= \| x f_1 + y f_2 - a \|^2$

où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

<u>Théorème de la pseudo-solution :</u>

il existe un unique $X_0 \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui minimise $\|AX-B\|^2$

Notons $Y_0 \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ le projeté orthogonal de $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a)$ sur $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$ : atteint en l'unique $X_0$ tel que $Y_0 = AX_0$.

$Y_0 = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 4/3 \\ -2/3 \\ -3/3 \end{pmatrix}$ et $X_0 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$.

**Exercice 14**

1. Classique

2. (a) $\|X^2\|^2 = \langle X^2, X^2 \rangle = \int_0^{+\infty} t^4 e^{-t}\,dt = \Gamma(5) = 4!$

$\|X^2\| = \sqrt{4!} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

(b) $Q = p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) \iff \begin{cases} Q \in \mathbb{R}_1[X] \\ Q - X^2 \perp \mathbb{R}_1[X] \end{cases}$

$Q = aX + b$

et $\langle Q - X^2; 1 \rangle = 0 \iff \int_0^{+\infty} (at + b - t^2) e^{-t}\,dt = 0$

$\iff b\Gamma(1) + a\Gamma(2) - \Gamma(3) = 0 \iff \underline{b + a - 2 = 0}$

$\langle Q - X^2, X \rangle = 0 \iff \int_0^{+\infty} (at^2 + bt - t^3) e^{-t}\,dt = 0$

$\iff a\Gamma(3) + b\Gamma(2) - \Gamma(4) = 0 \iff \underline{2a + b - 6} = 0$

D'où $\begin{cases} a+b=2 \\ 2a+b=6 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b=2-a \\ 2a+2-a=6 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b=-2 \\ a=4 \end{cases}$

Donc $p_{\mathbb{R}_1[X]}(X^2) = 4X-2$

(c) $h(a,b) = \| X^2 - aX - b \|^2$

Donc $\min\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} h(a,b) = \min\limits_{Q\in\mathbb{R}_1[X]} \| X^2 - Q \|^2$

atteint par $Q = p_{\mathbb{R}_1[X]} = 4X-2$

D'où min atteint par $(4;-2)$ et

$$h(4,-2) = \int_0^{+\infty} (t^2-4t+2)^2 e^{-t}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} (t^4+16t^2+4-8t^3+4t^2-16t)e^{-t}\,dt$$

$$= 4! + 16\times 2 + 4 - 8\times 3! + 4\times 2 - 16$$

$$= 24+32+4-48+8-16$$

$$= 60+8-48-16 = 4$$

$\boxed{\text{Bilan : } h \text{ admet un minimum sur } \mathbb{R}^2 \text{ en } (a,b)=(4,-2) \text{ et ce minimum vaut } h(4,-2)=4}$