DS n° 5 - Lundi 13 janvier 2025 -

On considère que tous les programmes Python commencent par
`import numpy as np` et `import numpy.random as rd`.
Il ne sera pas nécessaire de réécrire ces instructions

Exercice 1 : la loi de Xenakis

Dans cet exercice, a désigne un réel strictement positif.

On considère deux variables aléatoires X et Y, définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes, et suivant toutes deux la loi uniforme sur $[0, a[$.

On pose $Z = |X - Y|$ et on admet que $-Y$, $X - Y$ et Z sont des variables aléatoires à densité, elles aussi définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. (a) Simulation informatique.
   Ecrire un programme Python permettant de simuler les variables X, Y et Z.
   (b) Rappeler une densité de X ainsi que la fonction de répartition de X.
   (c) Déterminer une densité de $-Y$.
   (d) En déduire que la variable aléatoire $X - Y$ admet pour densité la fonction g définie par:
   $$g(x) = \begin{cases} \dfrac{a - |x|}{a^2} & \text{si } x \in [-a, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   On note G la fonction de répartition de $X - Y$.
2. (a) Exprimer la fonction de répartition H de la variable Z en fonction de G.
   (b) En déduire qu'une densité de Z est la fonction h définie par:
   $$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2(a - x)}{a^2} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
3. Montrer que Z possède une espérance et une variance et les déterminer.

Exercice 2 : la loi de Rayleigh

La question 7. est indépendante des autres questions.

Partie A

On considère une variable aléatoire X à densité, suivant la loi de Rayleigh, c'est-à-dire ayant pour fonction de répartition la fonction F définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

1. (a) Déterminer une densité de X.
   (b) Justifier que X admet une espérance et calculer $E(X)$.
2. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1]$.
   (a) Montrer que la variable aléatoire $V = \sqrt{-2.\ln(U)}$ suit la même loi que X.
   (b) Ecrire une fonction Python intitulée `def X:` qui simule X.
   Quel est le nom de la méthode utilisée pour effectuer cette simulation ?
3. Soit la variable aléatoire $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y. En déduire la variance de X.

Partie B

Soit a un réel strictement positif fixé. On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.

4. Justifier que $P(\bigcap_{k=1}^{+\infty}[X_k \leq a]) = 0$.
5. Soit N la variable aléatoire égale au plus petit indice $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_n > a$.
   Déterminer la loi de N. Préciser son espérance.
6. On considère la variable aléatoire $T = X_N$ définie sur Ω, où $\forall \omega \in \Omega$, $T(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$.
   (a) En utilisant la fonction Python `X` définie ci-dessus, écrire un programme Python qui demande a à l'utilisateur, puis qui simule T.
   (b) Soit $x \in [a; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer $P([N = n] \cap [T \leq x])$ en fonction de n, x et a (on distinguera le cas $n = 1$).
   (c) Déterminer finalement la fonction de répartition de T.

Partie C

7. Soit $n \geq 2$, et $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note $s = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$.
   On considère la matrice carrée $M = V.{}^tV$.
   (a) Calculer M. Justifier que M est diagonalisable.
   (b) Déterminer le rang de M, selon les valeurs du vecteur V.
   (c) Calculer $M.V$.

(d) Calculer M^2.

(e) Déterminer le spectre de M.

8. Dans cette question, on considère que V est une matrice aléatoire $V = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ où chaque X_k est une variable aléatoire suivant la loi de X. On suppose que les variables X_1, ..., X_n sont mutuellement indépendantes.

   On définit encore M par $M = V.{}^tV$, qui est alors une matrice aléatoire.
   On note S la variable aléatoire définie par $S = X_1^2 + \cdots + X_n^2$.
   On note respectivement A et B les événements :
   A : "M admet une seule valeur propre" et B : "M a une valeur propre strictement supérieure à 1".

   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire $\frac{1}{2}S$ (à l'aide du résultat du 3))

   (b) Déterminer $P(A)$.

   (c) Dans le cas où $n = 2$, déterminer $P(B)$.

Exercice 3 : application linéaire sur un espace euclidien

Soit n un entier tel que $n \geq 3$. On considère $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $\langle ., . \rangle$.
Soit a et b deux vecteurs de E fixés, orthogonaux et de norme 1. On note $F = Vect(a, b)$.
On considère l'application g définie sur E par :

$$\forall x \in E, \quad g(x) = \langle x, a \rangle .b - \langle x, b \rangle .a$$

1. (a) Justifier que g est un endomorphisme de E.
   (b) Justifier que $Ker(g) = F^\perp$.

2. (a) Justifier qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ de E telle que $u_1 = a$ et $u_2 = b$.
   (b) Préciser la matrice Δ de g dans cette base.

3. (a) Déterminer le rang de g, expliciter une base orthonormée de $Im(g)$.
   (b) Justifier que $\forall x \in Im(g)$, $\|g(x)\| = \|x\|$.

4. (a) Justifier que $\forall (x, y) \in E^2$, $\langle g(x), y \rangle = - \langle x, g(y) \rangle$.
   (b) Prouver que 0 est la seule valeur propre de g.
   L'endomorphisme g est-il diagonalisable ?

5. (a) On note $g^2 = g \circ g$. Préciser $g^2(a)$ et $g^2(b)$ et justifier que $Ker(g \circ g) = Ker(g)$.
   (b) Justifier que g^2 est diagonalisable. Préciser le spectre de g^2 et ses sous-espaces propres.

6. <u>Cas particulier :</u> ici, $n = 3$ et $a = \frac{1}{\sqrt{2}}.(1, -1, 0)$ et $b = \frac{1}{\sqrt{3}}.(1, 1, 1)$.
   (a) Vérifier que les deux vecteurs a et b remplissent les conditions du début de l'exercice.
   (b) Déterminer une base orthonormée de $F^\perp$.
   (c) Déterminer la matrice G de g dans la base canonique $\mathcal{C} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
   (d) En utilisant les résultats du 5.(b), expliciter une matrice diagonale D et une matrice orthogonale P telles que $G^2 = P.D.{}^tP$

Problème : des polynômes orthogonaux

Notations.

- On appelle polynôme unitaire un polynôme dont le coefficient dominant est égal à 1.
- On pose pour tout le problème $A(x) = x^2 - 1$ et $B(x) = 2x$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $P_k(x) = x^k$, de sorte que si $n \in \mathbb{N}$, $\beta = (P_0, \ldots, P_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}_n[x]$.

Objectifs.

Dans une première partie, on introduit une famille de polynômes (P_k) vecteurs propres d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$. L'objet de la seconde partie est l'étude, dans un cas particulier, d'une famille de polynômes orthogonaux de $\mathbb{R}_n[x]$. La troisième partie généralise l'exemple de la seconde partie.

I. Étude d'un endomorphisme

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on pose : $\Phi(P) = AP'' + BP'$.

1. (a) Démontrer que si $P \in \mathbb{R}_n[x]$ alors $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[x]$.
   (b) Démontrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$.
2. (a) Calculer $\Phi(P_0)$ et $\Phi(P_1)$.
   (b) Pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$ calculer $\Phi(P_k)$.
   (c) Déterminer la matrice M de Φ dans la base canonique $\beta = (P_0, P_1, \ldots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$.
   (d) En déduire le spectre de Φ.
3. L'endomorphisme Φ est-il bijectif ?
4. Déterminez le noyau de Φ.
5. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

II. Un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dès que P et Q sont des polynômes dans $\mathbb{R}_n[x]$ on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ dt$$

1. Démontrer que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

   Dans la suite de cette partie, on munit $\mathbb{R}_n[x]$ de ce produit scalaire.

2. **Une base orthogonale de vecteurs propres de Φ.** Dans cette question Φ désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ introduit dans la partie I.

   (a) Soient P et Q dans $\mathbb{R}_n[x]$. On pose $R = (P'Q - PQ')A$.
   Démontrer que $R' = \Phi(P)Q - P\Phi(Q)$.

(b) Démontrer que l'endomorphisme Φ est symétrique.

(c) Montrer qu'il existe une base orthogonale $(Q_0, \ldots, Q_n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$ formée de vecteurs propres de Φ, tels que $\deg(Q_k) = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et tels que les polynômes Q_k soient unitaires (i.e. de coefficient dominant égal à 1).

(d) Justifier que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ le polynôme Q_k est dans l'orthogonal de $\mathbb{R}_{k-1}[x]$.

III. Généralisation

Dans toute cette partie $\mathbb{R}[x]$ est muni d'un produit scalaire noté $\langle ., . \rangle$, cette notation étant indépendante de celle de la partie II.

On appelle *système orthogonal* toute suite de polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale, c'est-à-dire : $\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2$, $i \neq j \Rightarrow \langle Q_i, Q_j \rangle = 0$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, Q_n est unitaire (c'est à dire de coefficient dominant égal à 1) et de degré n.

1. On suppose qu'il existe un système orthogonal $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(V_0, V_1, \ldots, V_n)$ est une base orthogonale de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[x]$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On note F_n l'orthogonal de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_{n+1}[x]$.
   Démontrer que $Vect(V_{n+1}) = F_n$.

2. Justifier qu'il existe effectivement un système orthogonal $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   On pourra procéder par récurrence.

3. On suppose que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un autre système orthogonal.
   Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $W_n = V_n$.