Corrigé du DS n° 5 - Lundi 13 janvier 2025 -

Exercice 1 : EDHEC 2010 - la loi de Xenakis

1. (a) Sans aucune difficulté :

```
X=a*rd.random()
Y=a*rd.random()
Z=np.abs(X-Y)
```

(b) On rappelle que $X(\Omega) = [0, a[$, que X a pour densité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} \text{ si } x \in [0, a[\\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

et pour fonction de répartition

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ \frac{x}{a} \text{ si } 0 \leq x < a \\ 1 \text{ si } x \geq a \end{cases}$$

(c) Comme $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([0, a[)$, par propriété de stabilité affine pour les lois uniformes, $-Y \hookrightarrow \mathcal{U}(]-a, 0])$. Ainsi, $(-Y)(\Omega) =]-a, 0]$ et $-Y$ a pour densité,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{-Y}(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} \text{ si } -a < x \leq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

(d) Les variables X et $-Y$ sont à densité, indépendantes, et la densité f_X est bornée. D'après le th. sur le produit de convolution, la variable $X - Y$ est à densité, et l'une de ses densités est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t).f_{-Y}(x - t)dt$$

Remarquons que comme $0 \leq X < a$ et $-a < -Y \leq 0$, par somme $-a < X - Y < a$. On peut donc considérer que $g(x) = 0$ si $x \notin]-a, a[$.
Soit donc $x \in]-a, a[$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f_X(t).f_{-Y}(x - t) \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 \leq t < a \text{ et } -a < x - t \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq t < a \text{ et } x \leq t < a + x \end{aligned}$$

- 1er cas : si $-a < x \leq 0$, alors $f_X(t).f_{-Y}(x - t) \neq 0 \Leftrightarrow 0 \leq t < a + x$ et

$$g(x) = \int_0^{a+x} \frac{1}{a^2} dt = \frac{a + x}{a^2}$$

- 2ème cas : si $0 < x < a$, alors $f_X(t).f_{-Y}(x - t) \neq 0 \Leftrightarrow x \leq t < a$ et

$$g(x) = \int_x^a \frac{1}{a^2} dt = \frac{a - x}{a^2}$$

Bilan : on obtient bien pour densité de $X - Y$:

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} \frac{a-|x|}{a^2} \text{ si } x \in [-a, a] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}}$$

On note G la fonction de répartition de $X - Y$.

2. (a) Tout d'abord, comme $(X - Y)(\Omega) =]-a, a[$, on a $Z(\Omega) = [0, a[$. Ainsi si $x < 0$, $H(x) = 0$ et si $x \geq a$, $H(x) = 1$.
Si $x \in [0, a[$, alors

$$H(x) = P(|X - Y| \leq x) = P(-x \leq X - Y \leq x) = G(x) - G(-x)$$

Bilan : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ H(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ G(x) - G(-x) \text{ si } 0 \leq x < a \\ 1 \text{ si } x \geq a \end{cases}}$

(b) Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sauf en 0 et en a : la variable Z est à densité.

$$\forall x \in [0, a[,\ H'(x) = g(x) + g(-x) = 2g(x) = 2.\frac{a - |x|}{a^2} = \frac{2(a - x)}{a^2}$$

par parité de g.

Bilan :

$$\boxed{\text{une densité de } Z \text{ est la fonction } h \text{ définie par } h(x) = \begin{cases} \frac{2(a-x)}{a^2} & \text{si } x \in [0, a] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

3. La variable Z est bornée ($0 \leq Z < a$), donc Z admet une espérance et une variance.

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_0^a x.h(x)dx = \frac{2}{a^2}.\int_0^a ax - x^2 dx \\ &= \frac{2}{a^2}.[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}]_0^a \\ &= \frac{a}{3} \end{aligned}$$

Puis

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= \int_0^a x^2.h(x)dx = \frac{2}{a^2}.\int_0^a ax^2 - x^3 dx \\ &= \frac{2}{a^2}.[\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}]_0^a \\ &= \frac{a^2}{6} \end{aligned}$$

et enfin par la formule de Huygens,

$$V(Z) = E(Z^2) - (E(Z))^2 = \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{9} = \frac{a^2}{18}$$

Bilan : $\boxed{E(Z) = \frac{a}{3} \text{ et } V(Z) = \frac{a^2}{18}}$

Exercice 2

La question 7. est indépendante des autres questions.

Partie A

1. (a) La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Pour tout $x > 0$, $F'(x) = x.\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$.

Bilan : X admet pour densité $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x.\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \text{ si } x \geq 0 \end{cases}}$

(b) X admet une espérance si et seulement si l'intégrale suivante est (absolument) convergente, et en cas de convergence,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t.f_X(t)dt = \int_0^{+\infty} t^2.e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Soit N une variable aléatoire, $N \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. Alors N admet pour densité :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_N(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{t^2}{2}}$$

De plus, $E(N) = 0$ et $V(N) = 1$, donc $E(N^2) = V(N) + (E(N))^2 = 1$. Ainsi,

$$E(N^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2.f_N(t)dt = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.t^2.e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$$

Par parité, on a alors

$$\int_0^{+\infty} t^2.e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{1}{2}.\int_{-\infty}^{+\infty} t^2.e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

En particulier, cette intégrale converge et $E(X)$ existe.

Bilan : $\boxed{X \text{ admet une espérance et } E(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}}$

2. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1]$.

   (a) On considère $V = \sqrt{-2.\ln(U)}$.
   $V(\Omega) = \mathbb{R}_+$, donc pour tout $x < 0$, $F_V(x) = 0$.
   Soit $x \geq 0$. Alors

$$\begin{aligned} F_V(x) &= P(V \leq x) = P(\sqrt{-2\ln(U)} \leq x) \\ &= P(-2\ln(U) \leq x^2) = P(\ln(U) \geq -\frac{x^2}{2}) \\ &= P(U \geq \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}) \\ &= 1 - P(U < \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}) = 1 - F_U(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}})(\text{ variable à densité}) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = F_X(x) \end{aligned}$$

   En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \in]0,1]$, et on sait que pour tout $t \in]0,1]$, $F_U(t) = t$.
   Bilan : $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $F_V(x) = F_X(x)$, donc $\boxed{V \text{ et } X \text{ ont la même loi}}$

   (b)
```
def X:
    U=rd.random()
    V=np.sqrt(-2*np.log(U))
    return V
```
   On reconnait la fameuse méthode d'inversion.
   La variable V est obtenue en calculant la bijection réciproque de F_X (restreinte à $\mathbb{R}_+$).

3. Soit la variable aléatoire $Y = X^2$.
   $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Donc pour tout $x < 0$, $F_Y(x) = 0$.
   Si $x \geq 0$, alors

$$F_Y(x) = P(X^2 \leq x) = P(X \leq \sqrt{x}) = F_X(\sqrt{x}) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$$

   Bilan : $\boxed{Y \text{ suit la loi } \mathcal{E}(\frac{1}{2})}$

   On en déduit que $E(Y) = 2$. D'où $E(X^2) = 2$, et d'après la formule de Huygens,

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2 - \frac{\pi}{2} = \frac{4-\pi}{2}}$$

Partie B

Soit a un réel strictement positif fixé. On considère une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes de même loi que X.

4. Par propriété de limite monotone,

$$P(\bigcap_{k=1}^{+\infty}[X_k \leq a]) = \lim_{N\to+\infty} P(\bigcap_{k=1}^{N}[X_k \leq a])$$

   Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Les variables X_1, ..., X_N étant indépendantes,

$$P(\bigcap_{k=1}^{N}[X_k \leq a]) = \prod_{k=1}^{N} P(X_k \leq a) = F_X(a)^N = (1 - \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}})^N$$

   Pour tout $a > 0$, $\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}} \in]0,1[$, donc $1 - \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}} \in]0,1[$ et $\lim_{N\to+\infty}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}})^N = 0$.

   Bilan : $\boxed{P(\bigcap_{k=1}^{+\infty}[X_k \leq a]) = 0}$

5. Soit $a > 0$. Tout d'abord, comme $P(\bigcap_{k=1}^{+\infty}[X_k \leq a]) = 0$, il existe presque sûrement un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_n > a$. On peut donc considérer N la variable aléatoire égale au plus petit indice $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X_n > a$.

   $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$$P(N = 1) = P(X_1 > a) = 1 - F_X(a) = \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}$$

   Si $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} P(N = n) &= P([X_1 \leq a] \cap \cdots \cap [X_{n-1} \leq a] \cap [X_n > a]) \\ &= (F_X(a))^{n-1}.(1 - F_X(a)) \text{ par indépendance mutuelle des variables} \\ &= (1 - \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}})^{n-1}.\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}} \end{aligned}$$

   et on reconnait une loi géométrique !!

   Bilan : $\boxed{N \hookrightarrow \mathcal{G}(\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}})}$. Par conséquent, $\boxed{E(N) = \frac{1}{\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}}} = \mathrm{e}^{\frac{a^2}{2}}}$

6. On considère $T = X_N$ définie sur Ω, où $\forall \omega \in \Omega$, $T(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$.

   (a)
```
T=X()
while T<=a:
  T=X()
print(T)
```
   La variable N n'apparait pas dans cette simulation...

   (b) Soit $x \in [a; +\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
   Si $n = 1$,

$$P([N = 1] \cap [T \leq x]) = P(a < X_1 \leq x) = F_X(x) - F_X(a) = \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

   Si $n \geq 2$,

$$[N = n] \cap [T \leq x] = [X_1 \leq a] \cap \cdots \cap [X_{n-1} \leq a] \cap [a < X_n \leq x]$$

   D'où, les variables X_1, ..., X_n étant indépendantes,

$$P([N = n] \cap [T \leq x]) = (F_X(x))^{n-1}.(F_X(x) - F_X(a)) = (1 - \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}})^{n-1}.(\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}})$$

   ce qui reste encore vrai si $n = 1$.

   (c) $T(\Omega) =]a; +\infty[$, donc pour tout $x \leq a$, $F_T(x) = 0$. Si $x \in]a; +\infty[$, d'après la FPT appliquée dans le SCE $([N = n])_{n\in\mathbb{N}^*}$, on obtient :

$$\begin{aligned} P(T \leq x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P([N = n] \cap [T \leq x]) \\ &= (\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}).\sum_{n=1}^{+\infty}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}})^{n-1} \\ &= (\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}).\sum_{k=0}^{+\infty}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}})^{k} \\ &= (\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}).\frac{1}{1 - (1 - \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}})} \\ &= \mathrm{e}^{\frac{a^2}{2}}.(\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}) \\ &= 1 - \mathrm{e}^{\frac{a^2-x^2}{2}} \end{aligned}$$

Bilan : T a pour fonction de répartition

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_T(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq a \\ 1 - \mathrm{e}^{\frac{a^2-x^2}{2}} \text{ si } x > a \end{cases}}$$

Remarque : on vérifie que cette fonction est bien continue en a, et admet pour limite 0 en $+\infty$.
F_T est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{a\}$, donc T est une variable à densité.

Partie C

7. Soit $n \geq 2$, et $V = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On considère la matrice carrée $M = V.{}^tV$.

(a)

$$M = V.{}^tV = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix} = (x_ix_j)_{1 \leq i,j \leq n}$$

M est symétrique donc diagonalisable

(b) Si $V = 0$, alors $M = 0$ et $rg(M) = 0$.
Si $V \neq 0$, alors l'un des coefficients x_i est non nul.
On remarque que $M = (x_1V | x_2V | \cdots | x_nV)$, d'où

$$rg(M) = \dim(Vect(x_1V, x_2V, \cdots, x_nV)) = \dim(Vect(V)) = 1$$

Bilan : $\boxed{rg(M) = \begin{cases} 0 \text{ si } V = 0 \text{ (et alors } M = 0) \\ 1 \text{ si } V \neq 0 \end{cases}}$

(c)

$$M.V = V.{}^tV.V = V.\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2).V = sV$$

(d) D'où $M^2 = M.V.{}^tV = s.V.{}^tV = sM$.

(e) Ainsi $M^2 - sM = 0$: le polynôme $P = X^2 - sX$ est annulateur de M. D'après le cours, $Sp(M) \subset \{$racines de P$\}$ donc $Sp(M) \subset \{0, s\}$.
Si $V = 0$, alors $M = 0$ et donc $Sp(M) = \{0\}$.
Si $V \neq 0$, comme $rg(M) = 1 \neq n$, $0 \in Sp(M)$. De plus $M.V = s.V$ donc $s \in Sp(M)$. Finalement dans ce cas $Sp(M) = \{0, s\}$.

Bilan : $\boxed{Sp(M) = \{0, s\} \text{ si } V \neq 0,\ Sp(M) = \{0\} \text{ si } V = 0 \text{ (et } M = 0 \text{ dans ce cas)}}$

8. (a) $\frac{1}{2}S = \frac{1}{2}X_1^2 + \cdots + \frac{1}{2}X_n^2$.
D'après le 3.a), la variable X^2 suit la loi $\mathcal{E}(\frac{1}{2})$.
D'après le cours, $\frac{1}{2}X^2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1) = \gamma(1)$.
D'autre part, par coalition, les variables $\frac{1}{2}X_1^2$, ..., $\frac{1}{2}X_n^2$ sont mutuellement indépendantes.
D'après le théorème de stabilité pour la somme de variables suivant une loi γ, $\boxed{\frac{1}{2}S \hookrightarrow \gamma(n)}$

(b) On a vu que M admet une unique valeur propre, qui vaut 0, ssi $V = 0$, c'est-à-dire ssi $X_1 = \cdots = X_n = 0$, ce qui équivaut à dire que $S = 0$.
La variable $\frac{1}{2}S$ étant à densité, $P(A) = P(S = 0) = P(\frac{1}{2}S = 0) = 0$.
Donc $P(A) = 0$: la matrice M admet presque sûrement deux valeurs propres.

(c) Si $n = 2$, on cherche la probabilité de $[S > 1]$.

$$\begin{aligned} P(S > 1) &= 1 - P(S \leq 1) = 1 - P(\frac{1}{2}S \leq \frac{1}{2}) \\ &= 1 - \frac{1}{\Gamma(2)} \int_0^{1/2} t.e^{-t} dt \\ &= 1 - \int_0^{1/2} t.e^{-t} dt \end{aligned}$$

Posons

$$\begin{array}{lcl} u(t) = t & \rightarrow & u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{-t} & & v(t) = -e^{-t} \end{array}$$

alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et par IPP,
en fin d'exercice on peut aussi zapper les justifications pour gagner du temps !! Si vous êtes arrivés jusqu'ici le correcteur vous fera confiance

$$\begin{aligned} P(S > 1) &= 1 - [-t.e^{-t}]_0^{1/2} - \int_0^{1/2} e^{-t} dt \\ &= 1 + \frac{1}{2}.e^{-1/2} + [e^{-t}]_0^{1/2} \\ &= 1 + \frac{1}{2}.e^{-1/2} + e^{-\frac{1}{2}} - 1 \\ &= \frac{3}{2}.e^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{P(B) = \frac{3}{2}.e^{-\frac{1}{2}}}$

Remarque : $P(B) \simeq 0.9$, ce qui appartient bien à $[0, 1]$!!

Exercice 3 : application linéaire sur un espace euclidien

Soit n un entier tel que $n \geq 3$. On considère $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique $\langle .,. \rangle$. Soit a et b deux vecteurs de E fixés, orthogonaux et de norme 1. On note $F = Vect(a, b)$.
On considère l'application g définie sur E par :

$$\forall x \in E, \quad g(x) = \langle x, a \rangle .b - \langle x, b \rangle .a$$

1. (a) Tout d'abord, g va bien de E dans E.
Soit $(x, y) \in E^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g(x + \alpha.y) &= \langle x + \alpha.y, a \rangle .b - \langle x + \alpha.y, b \rangle .a \\ &= \langle x, a \rangle .b + \alpha \langle y, a \rangle .b - \langle x, b \rangle .a - \alpha. \langle y, b \rangle .a \\ &= \langle x, a \rangle .b - \langle x, b \rangle .a + \alpha.(\langle y, a \rangle .b - \langle y, b \rangle .a) \\ &= g(x) + \alpha.g(y) \end{aligned}$$

Donc $\boxed{g \text{ est un endomorphisme de } E}$

(b) Comme les deux vecteurs a et b forment une famille orthonormée, la famille (a, b) est libre.
Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in Ker(g) &\Leftrightarrow \langle x, a \rangle .b - \langle x, b \rangle .a = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle x, a \rangle = 0 \text{ et } \langle x, b \rangle = 0 \text{ car la famille } (a, b) \text{ est libre} \\ &\Leftrightarrow x \in Vect(a, b)^{\perp} \\ &\Leftrightarrow x \in F^{\perp} \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{Ker(g) = F^{\perp}}$

2. (a) La famille (a, b) est orthonormée. D'après le théorème de la base orthonormée incomplète, il existe des vecteurs $(u_3, ..., u_n)$ tels que la famille $\mathcal{B} = (u_1 = a, u_2 = b, u_3, \cdots, u_n)$ est une BON de E.

(b) Comme la famille (a, b) est orthonormée,

$$g(a) = \langle a, a\rangle .b - \langle a, b\rangle .a = b$$

$$g(b) = \langle b, a\rangle .b - \langle b, b\rangle .a = -a$$

De plus, pour tout $i \in [[3, n]]$, le vecteur u_i est orthogonal à a et à b, donc $g(u_i) = 0$.

On en déduit que

$$\Delta = Mat_{\mathcal{B}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

3. (a) $rg(g) = rg(\Delta) = 2$.
De plus,

$$Im(g) = Vect(g(a), g(b), g(u_3), ..., g(u_n)) = Vect(b, -a) = Vect(a, b) = F$$

On en déduit que la famille (a, b) est une BON de $Im(g)$.

(b) Soit $x \in Im(g)$ D'après la question précédente, il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x = \alpha.a + \beta.b$. On a donc

$$g(x) = \alpha.g(a) + \beta.g(b) = \alpha.b - \beta.a$$

D'où comme a et b sont orthogonaux, d'après le théorème de Pythagore,

$$\begin{aligned} \|g(x)\|^2 &= \|\alpha.b - \beta.a\|^2 \\ &= \|\alpha.b\|^2 + \|\beta.a\|^2 = \alpha^2.\|b\|^2 + \beta^2.\|a\|^2 \\ &= \alpha^2 + \beta^2 \quad \text{car } a \text{ et } b \text{ sont de norme 1} \end{aligned}$$

et d'autre part, par les mêmes arguments,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|\alpha.a + \beta.b\|^2 \\ &= \alpha^2.\|a\|^2 + \beta^2.\|b\|^2 \\ &= \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned}$$

On a donc $\|g(x)\|^2 = \|x\|^2$ donc $\|g(x)\| = \|x\|$.

Bilan : $\boxed{\forall x \in Im(g),\ \|g(x)\| = \|x\|}$

4. (a) $\forall (x, y) \in E^2$, d'une part,

$$\begin{aligned} \langle g(x), y\rangle &= \langle \langle x, a\rangle .b - \langle x, b\rangle .a, y\rangle \\ &= \langle x, a\rangle . \langle b, y\rangle - \langle x, b\rangle . \langle a, y\rangle \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \langle x, g(y)\rangle &= \langle x, \langle y, a\rangle .b - \langle y, b\rangle .a\rangle \\ &= \langle y, a\rangle . \langle x, b\rangle - \langle y, b\rangle . \langle x, a\rangle \\ &= -\langle g(x), y\rangle \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{\forall (x, y) \in E^2,\ \langle g(x), y\rangle = -\langle x, g(y)\rangle}$

Autrement dit, g est un endomorphisme antisymétrique (HP)

(b) Tout d'abord, $\dim(Ker(g)) = \dim(E) - \dim(Im(g)) = n - 2 \geq 1$ car $n \geq 3$. Donc 0 est une valeur propre de g.
D'autre part, soit λ une valeur propre de g et x un vecteur propre associé : $g(x) = \lambda.x$ avec $x \neq 0_E$. Alors

$$\langle g(x), x\rangle = -\langle x, g(x)\rangle \Leftrightarrow \lambda.\|x\|^2 = -\lambda.\|x\|^2 \Leftrightarrow 2.\lambda.\|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

car $x \neq 0_E$. Donc $\lambda = 0$ est la seule valeur propre possible de g.

Bilan : $\boxed{Sp(g) = \{0\}}$

Comme

$$\sum_{\lambda \in Sp(g)} \dim(Ker(g - \lambda.Id_E)) = \dim(Ker(g)) = n - 2 \neq n$$

$\boxed{g \text{ n'est pas diagonalisable}}$

5. (a) On note $g^2 = g \circ g$.

$$g^2(a) = g(g(a)) = g(b) = -a$$

$$g^2(b) = g(g(b)) = g(-a) = -g(a) = -b$$

et pour tout $i \in [[3, n]]$, $g^2(u_i) = g(0_E) = 0_E$.
On en déduit que

$$\dim(Im(g^2)) = \dim Vect(g^2(a), g^2(b), g^2(u_3), ..., g^2(u_n)) = Vect(a, b) = F$$

Donc $\dim(Im(g^2)) = 2$. Ainsi $\dim(Ker(g^2)) = n - 2 = \dim(Ker(g))$.
Comme $Ker(g) \subset Ker(g^2)$ (classique et facile), on a alors bien $\boxed{Ker(g \circ g) = Ker(g)}$

(b) La matrice de g^2 dans la base $\mathcal{B}$ est alors $Mat_{\mathcal{B}}(g^2) = Diag(-1, -1, 0, ..., 0)$. Cette matrice est diagonale, donc g^2 est bien diagonalisable !!
De plus, $Sp(g^2) = \{-1, 0\}$, $Ker(g^2 + Id) = Vect(a, b) = F$ et $Ker(g^2) = Vect(u_3, ..., u_n) = F^{\perp}$.

6. Cas particulier : ici, $n = 3$ et $a = \frac{1}{\sqrt{2}}.(1, -1, 0)$ et $b = \frac{1}{\sqrt{3}}.(1, 1, 1)$.

(a) On voit immédiatement que $\langle a, b\rangle = 0$, que $\|a\| = \|b\| = 1$.

(b) Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} u \in F^{\perp} &\Leftrightarrow \langle u, a\rangle = 0 \text{ et } \langle u, b\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow x - y = 0 \text{ et } x + y + z = 0 \\ &\Leftrightarrow y = x \text{ et } z = -2x \end{aligned}$$

Donc $F^{\perp} = Vect((1, 1, -2))$. Comme $\|(1, 1, -2)\| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}$, le vecteur $c = \frac{1}{\sqrt{6}}.(1, 1, -2)$ est normé. La famille (c) est une BON de $F^{\perp}$.

(c)

$$g(e_1) = \langle e_1, a\rangle .b - \langle e_1, b\rangle .a = ... = (0, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}})$$

On obtient aussi $g(e_2) = (-\frac{2}{\sqrt{6}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{6}})$ et $g(e_3) = (-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, 0)$. D'où :

$$G = Mat_{\mathcal{B}_c}(g) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est antisymétrique !

(d) D'après la première partie, $Sp(G^2) = \{-1, 0\}$.
Comme $Ker(g^2 + Id) = Vect(a, b) = F$ et $Ker(g^2) = Vect(c) = F^{\perp}$, on peut considérer les matrices

$$D = Diag(-1, -1, 0)$$

et

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice est bien orthogonale puisqu'elle est obtenue par concaténation des BON des deux sous-espaces propres.

Problème : *Des polynômes orthogonaux*

I. Étude d'un endomorphisme

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[x]$, on pose : $\Phi(P) = AP'' + BP'$.

1. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Pour tout réel x,

$$\Phi(P)(x) = (x^2 - 1).P''(x) + 2x.P'(x)$$

Comme $\deg(P'') \leq n-2$ et $\deg(A) = 2$, $\deg(AP'') \leq n$. De plus comme $\deg(P') \leq n-1$ et $\deg(B) = 1$, on a $\deg(BP') \leq n$. Finalement par somme, $\deg(\Phi(P)) \leq n$. Donc $\Phi(P) \in \mathbb{R}_n[x]$.

(b) On a déjà vu que Φ va de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_n[x]$.
Pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[x]$, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha.P + Q) &= A.(\alpha.P + Q)'' + B.(\alpha.P + Q)' \\ &= \alpha.A.P'' + A.Q'' + \alpha.B.P' + B.Q' \\ &= \alpha.\Phi(P) + \Phi(Q)\end{aligned}$$

donc Φ est linéaire.

Bilan : $\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[x]}$

2. (a) $P_0' = 0$ et $P_0'' = 0$ donc $\Phi(P_0) = 0$.
$P_1' = 1$ et $P_1'' = 0$ donc $\Phi(P_1) = B = 2P_1$.

(b) Pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi(P_k)(x) = (x^2 - 1).k(k-1)x^{k-2} + 2x.kx^{k-1} = k(k+1)x^k - k(k-1)x^{k-2}$$

donc $\boxed{\Phi(P_k) = k(k+1)P_k - k(k-1)P_{k-2}}$

(c) On en déduit la matrice M de Φ dans la base canonique $\beta = (P_0, P_1, \dots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & & 0 & & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ddots & . & . & \\ 0 & 0 & 6 & \ddots & -k(k-1) & & \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & k(k+1) & \ddots & -n(n-1) \\ 0 & 0 & & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n(n+1) \end{pmatrix}$$

(d) La matrice M étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux:

$$\boxed{Sp(\Phi) = Sp(M) = \{k(k+1); \quad k \in [[0, n]]\}}$$

3. $0 \in Sp(M)$, donc M n'est pas inversible et Φ n'est pas bijective.

4. Comme $x \mapsto x(x+1)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, Φ possède $n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes. Comme $\Phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[x])$ et $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1$, Φ est diagonalisable et les sous-espaces propres de Φ sont tous de dimension 1.
On en déduit que $Ker(\Phi) = Vect(P_0)$.

5. On a déjà vu que $\boxed{\Phi \text{ est diagonalisable}}$

II. Un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dès que P et Q sont des polynômes dans $\mathbb{R}_n[x]$ on pose :

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt$$

1. Montrons que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[x]$.

- Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[x]^2$. Comme $t \mapsto P(t)Q(t)$ est continue sur $[-1, 1]$, l'intégrale est bien définie et $\langle ., . \rangle$ va bien de $\mathbb{R}_n[x] \times \mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}$.
- Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[x]^2$.

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt = \int_{-1}^{1} Q(t)P(t)\, dt = \langle Q, P \rangle$$

donc $\langle ., . \rangle$ est symétrique.
- Soit $(P, Q, R) \in \mathbb{R}_n[x]^3$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}\langle \alpha.P + Q, R \rangle &= \int_{-1}^{1} (\alpha.P(t) + Q(t)).R(t)\, dt \\ &= \alpha.\int_{-1}^{1} P(t)R(t)\, dt + \int_{-1}^{1} Q(t)R(t)\, dt \\ &= \alpha.\langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle\end{aligned}$$

Donc $\langle ., . \rangle$ est linéaire à gauche. Etant symétrique, $\langle ., . \rangle$ est bilinéaire.
- Soit $P \in \mathbb{R}_n[x]$. Alors

$$\langle P, P \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)^2\, dt \geq 0$$

Si $\langle P, P \rangle = 0$, comme $t \mapsto P(t)^2$ est continue et positive sur $[-1, 1]$, on a pour tout $t \in [-1, 1]$, $P(t)^2 = 0$ donc $P(t) = 0$. Par conséquent, P a une infinité de racines : P est le polynôme nul. Donc $\langle ., . \rangle$ est définie positive.
- Bilan : $\boxed{\langle ., . \rangle \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}_n[x]}$

Dans la suite de cette partie, on munit $\mathbb{R}_n[x]$ de ce produit scalaire.

2. **Une base orthogonale de vecteurs propres de Φ.** Dans cette question Φ désigne l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[x]$ introduit dans la partie I.

(a) Soient P et Q dans $\mathbb{R}_n[x]$. On pose $R = (P'Q - PQ')A$.

On remarque que $A' = B$. On dérive R :

$$\begin{aligned}R' &= (P''Q + P'Q' - P'Q' - PQ'').A + (P'Q - PQ').A' \\ &= P''Q.A - PQ''.A + P'Q.B - PQ'.B \\ &= (P''.A + P'.B).Q - (Q''.A + Q'.B).P \\ &= \Phi(P)Q - P\Phi(Q)\end{aligned}$$

(b) On en déduit que pour tout $(P, Q) \in (\mathbb{R}_n[x])^2$,

$$\begin{aligned}\langle \Phi(P), Q \rangle - \langle P, \Phi(Q) \rangle &= \int_{-1}^{1} (\Phi(P).Q - P.\Phi(Q))(t)dt \\ &= [R(t)]_{-1}^{1} \text{ d'après la question précédente} \\ &= R(1) - R(-1) = 0 \text{ car -1 et 1 sont racines de A}\end{aligned}$$

Ainsi $\langle \Phi(P), Q \rangle = \langle P, \Phi(Q) \rangle$.

Bilan : l'endomorphisme Φ est symétrique.

(c) Comme Φ est symétrique, d'après le cours il existe une base orthonormée $(P_0, \cdots, P_n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$ formée de vecteurs propres de Φ. On suppose que pour tout $k \in [[0,n]]$, P_k est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda_k = k(k+1)$.
Le polynôme P_k vérifie alors

$$\Phi(P_k) = k(k+1)P_k \Leftrightarrow P_k''.A + P_k'.B = k(k+1)P_k$$

Supposons que $\deg(P_k) = p \in \mathbb{N}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_k(x) = \sum_{i=0}^{p} a_i.x^i$, avec $(a_0, \cdots, a_p) \in \mathbb{R}^{p+1}$ et $a_p \neq 0$.
D'une part le terme de plus haut degré dans l'expression précédente est égal à $k(k+1).a_p.x^p$.
D'autre part, il s'agit de

$$p(p-1).a_p.x^p + 2p.a_p.x^p = p(p+1).a_p.x^p$$

En identifiant les coefficients dominants : $p(p+1).a_p = k(k+1).a_p$ donc $p(p+1) = k(k+1)$.
Comme la fonction $x \mapsto x(x+1)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, elle est injective donc $p = k$.
Finalement $\deg(P_k) = k$.
En notant pour tout $k \in \mathbb{N}$, a_k le coefficient dominant de P_k (qui est non nul), il suffit de considérer pour tout $k \in [[0,n]]$ le polynôme $Q_k = \frac{1}{a_k}.P_k$ pour que la famille $(Q_0, \cdots, Q_n)$ soient formée de polynômes unitaires vérifiant les conditions souhaitées.

Bilan : il existe une base orthogonale $(Q_0, \ldots, Q_n)$ de $\mathbb{R}_n[x]$ formée de vecteurs propres de Φ, formée de polynômes unitaires, tels que $\deg(Q_k) = k$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$.

(d) Soit $k \in [[1,n]]$. La famille $(Q_0, \cdots, Q_{k-1})$ est une famille orthogonale de polynômes non nuls (car unitaires) de $\mathbb{R}_{k-1}[x]$. D'après le cours, il s'agit d'une famille libre de vecteurs de $\mathbb{R}_{k-1}[x]$.
Comme $Card(Q_0, \cdots, Q_{k-1}) = k = \dim \mathbb{R}_{k-1}[x]$, il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_{k-1}[x]$.
Soit $P \in \mathbb{R}_{k-1}[x]$, on peut alors écrire $P = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i Q_i$ où $(\alpha_0, \cdots, \alpha_{k-1}) \in \mathbb{R}^k$. D'où

$$\begin{aligned} \langle P, Q_k \rangle &= \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i \langle Q_i, Q_k \rangle \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i.0 \text{ car } (Q_0, \cdots, Q_k) \text{ est une famille orthogonale} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![1,n]\!] \text{ le polynôme } Q_k \text{ est dans l'orthogonal de } \mathbb{R}_{k-1}[x]}$

III. Généralisation

1. On suppose qu'il existe un système orthogonal $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La famille $(V_0, \cdots, V_n)$ est une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[x]$. Etant une famille orthogonale de polynômes non nuls (car unitaires), cette famille est libre d'après le cours. De plus $Card(V_0, V_1, \ldots, V_n) = n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[x]$.
Donc $\boxed{(V_0, V_1, \cdots, V_n) \text{ est une base orthogonale de l'espace vectoriel } \mathbb{R}_n[x]}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On note F_n l'orthogonal de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_{n+1}[x]$.
Tout d'abord, $\dim(F_n) = \dim(\mathbb{R}_n[x]) - \dim \mathbb{R}_{n-1}[x] = n + 1 - n = 1$.
De plus, $V_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+1}[x]$ et pour tout $k \in [[0,n]]$, $V_{n+1} \perp V_k$, donc par linéarité $V_{n+1} \in F_n$ (analogue Partie II).
Comme $V_{n+1} \neq 0$ et $\dim(F_n) = 1$, on a alors $\boxed{Vect(V_{n+1}) = F_n}$

2. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$\mathcal{H}(n)$: "il existe une base orthogonale $(V_n)_{n\in[[0,n]]}$ de $\mathbb{R}_n[x]$ telle que :
pour tout $k \in [[0,n]]$, $\deg(V_k) = k$ et telle que les polynômes soient unitaires".

- Initialisation : si $n = 0$, $\mathbb{R}_0[x] = Vect(1)$. On note alors $V_0 = 1$. Ce polynôme est unitaire, de degré 0 et $\deg(V_0) = 0$: la famille (V_0) convient.

- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(n)$ est vraie. Alors $(V_0, \cdots, V_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
On considère F_n l'orthogonal de $\mathbb{R}_n[x]$ dans $\mathbb{R}_{n+1}[x]$. Il s'agit d'une droite vectorielle, et l'on peut considérer un polynôme unitaire (quitte à diviser par le coeff dominant) V_{n+1} tel que : $F_n = Vect(V_{n+1})$.
D'après le cours, $F_n \oplus \mathbb{R}_n[x] = \mathbb{R}_{n+1}[x]$ et la famille $(V_0, \cdots, V_n, V_{n+1})$ obtenue par concaténation de bases est alors une base orthogonale de $\mathbb{R}_{n+1}[x]$ formée de polynômes unitaires. De plus V_{n+1} est nécessairement de degré $n+1$ (sinon on aurait $V_{n+1} \in \mathbb{R}_n[x]$, ce qui contredit $F_n + \mathbb{R}_n[x] = \mathbb{R}_{n+1}[x]$).
Ainsi la famille $(V_0, \cdots, V_n)$ convient.
- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ est vraie.
Autrement dit, $\boxed{\text{il existe un système orthogonal } (V_n)_{n\in\mathbb{N}}}$

3. Tout d'abord, le polynôme $V_0 = 1$ est unique. Ensuite, à chaque étape dans la construction ci-dessus, il existe un unique polynôme unitaire qui engendre la droite vectorielle F_n, d'où l'unicité du polynôme V_n à chaque étape.

Bilan : $\boxed{\text{le système orthogonal est unique}}$