

Informatique : programmation en Python

En particulier :

Simulation de lois usuelles discrètes ou à densité : connaître la syntaxe.

Méthode d'inversion (guidée) pour simuler une variable à densité. Simulation de max, de min, de sommes de variables aléatoires...

Chapitre 9 - Algèbre bilinéaire II (suite et fin)

1. Endomorphismes symétriques

2. Matrices symétriques

3. Forme quadratique (définition uniquement.)

4. Projection orthogonale

(a) Rappels sur les projecteurs : endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$. Un projecteur de E est la projection sur $F = Im(p)$ parallèlement à $G = Ker(p)$.

(b) Définition d'un projecteur orthogonal : projection sur F , parallèlement à F^\perp .

(c) $Im(p_F) = F$, $Ker(p_F) = F^\perp$, donc $Im(p_F) = (Ker(p_F))^\perp$, $p_F + p_{F^\perp} = Id_E$,
 $p_F \circ p_{F^\perp} = p_{F^\perp} \circ p_F = 0$.

(d) p est un projecteur orthogonal de E si et seulement si : p est un endomorphisme de E , $p \circ p = p$ et $Ker(p) \perp Im(p)$.

(e) **p est un projecteur orthogonal de $E \Leftrightarrow p$ est un endomorphisme symétrique de E et $p \circ p = p$.**

Conséquence : si \mathcal{B} est une BON de E et $A = Mat_{\mathcal{B}}(p)$, p est un projecteur orthogonal ssi $A^2 = A$ et ${}^tA = A$.

(f) **Caractérisation du projeté orthogonal d'un vecteur**

Soit E un espace euclidien, soit F un sev de E , $u \in E$ et $v \in E$. Alors

$$v = p_F(u) \Leftrightarrow v \in F \text{ et } u - v \in F^\perp$$

Si $F = Vect(e_1, \dots, e_m)$ alors $v = p_F(u)$ ssi $\begin{cases} v \in F \\ \forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket, (u - v) \perp e_k \end{cases}$.

(g) **Caractérisation connaissant une BON de F** Soit E un espace euclidien. Soit F un sev de E muni d'une BON (u_1, \dots, u_m) . Alors

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{k=1}^m \langle x, u_k \rangle . u_k$$

Attention : il faut disposer d'une BON : éventuellement utiliser la méthode de Schmidt pour construire une BON

(h) **Minimisation par projection orthogonale.**

Soit E un e.v. euclidien, F un sev de E et $a \in E$ un vecteur fixé.

Soit p_F la projection orthogonale sur F . L'application $h : F \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $h(x) = \|a - x\|$ admet un minimum absolu, atteint uniquement en $p_F(a)$.

(i) **Pseudo-solutions, moindres carrés** (difficile, on atteint les limites de notre programme !!)

Chapitre 10 - Vecteurs aléatoires

Réviser : toutes les lois usuelles (discrètes ou à densité), les théorèmes de stabilité pour les lois usuelles (par somme ou par combinaison linéaire).

1. Couples de variables aléatoires : notion de loi conjointe.

2. Théorème de transfert pour les couples de VARD : si X et Y sont deux VARD et $Z = g(X, Y)$ alors sous réserve de convergence,

$$E(Z) = \sum_{i \in X(\Omega), j \in Y(\Omega)} g(i, j) . P([X = i] \cap [Y = j])$$

3. Cas du produit : si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors XY admet une espérance (*) (astuce à retenir !!) et

$$E(XY) = \sum_{i \in X(\Omega), j \in Y(\Omega)} ij . P([X = i] \cap [Y = j])$$

Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X) . E(Y)$.

4. Covariance

(a) Définition : si deux VARD X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors leur covariance est définie par $Cov(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y)))$.

(b) Formule de Huygens pour la covariance : $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

(c) $Cov(X, X) = V(X)$ et $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$

(d) On en déduit $Cov(X, Y) = \frac{1}{2}(V(X + Y) - V(X) - V(Y))$ (formule de polarité)

(e) La covariance est une application bilinéaire symétrique et positive (mais pas définie positive).

(f) Coefficient de corrélation linéaire : si X et Y admettent un moment d'ordre 2 alors

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$$

(lettre grecque rho)

(g) $|Cov(X, Y)| \leq \sqrt{V(X)} . \sqrt{V(Y)}$ (*) : Cauchy-Schwarz pour la covariance.

On en déduit que $|\rho(X, Y)| \leq 1$.

On a $|\rho(X, Y)| = 1$ si et seulement si il existe deux réels $a \neq 0$ et b tels que l'on ait $Y = aX + b$ presque sûrement (i.e. $P(Y = aX + b) = 1$).

5. Vecteurs aléatoires

(a) Un vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_n) est la donnée de n VAR X_1, \dots, X_n .

Déterminer la loi du vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$, c'est déterminer la fonction $F_X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, où

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k \leq x_k]\right)$$

(b) Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ et $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ deux vecteurs aléatoires ayant la même loi.

Soit $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur \mathbb{R}^n (cf chapitre sur les fonctions de n variables).

Alors les deux variables $g(X_1, \dots, X_n)$ et $g(Y_1, \dots, Y_n)$ ont la même loi.

- (c) Si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_k admet une espérance et si les variables X_k sont mutuellement indépendantes, alors $X_1 \cdots X_n$ admet une espérance et

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdots X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdots E(X_n)$$

- (d) Si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_k admet un moment d'ordre 2 et si les X_k sont deux à deux indépendantes, alors $\sum_{i=1}^n X_i$ admet une variance et

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$$

6. Vecteurs aléatoires discrets

Soit $(X_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une n -liste de VARD définies sur un même espace probabilisé (Ω, \mathcal{T}, P) .

Cette n -liste est appelée **vecteur aléatoire discret**

Déterminer la loi du vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$, c'est donner,

pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$,

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k = x_k]\right)$$

Les lois de X_1, \dots, X_n sont appelées lois marginales.

(*) : preuve exigible