Exercices - Chapitre 11 - Convergence de VAR

Exercice 1
Soit n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie, pour tout x réel, par:

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$$

1. Montrer que f_n est une densité de probabilité.
2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n admet comme densité f_n
   (a) Soit $\varepsilon > 0$, montrer que $P(|X_n| \leqslant \varepsilon) = \dfrac{2}{\pi} arctan(n\varepsilon)$.
   (b) En déduire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable certaine nulle.

Exercice 2
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ indépendantes et suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.
On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et $T_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} Y_i$.

1. Déterminer la loi de Y_n, son espérance et sa variance.
2. Montrer que pour tout i de $[[1, n-1]]$, les variables aléatoires Y_i et Y_{i+1} ne sont pas indépendantes en étudiant les événements $(Y_i = 2)$ et $(Y_{i+1} = 0)$.
3. Montrer que pour tout (i, j) de $[[1, n-2]] \times [[2, n]]$, telles que $i < j-1$, les variables aléatoires Y_i et Y_j sont indépendantes.
4. Pour tout couple d'entiers (i, j) tel que $1 \leqslant i < j \leqslant n$, déterminer $cov(Y_i, Y_j)$.
5. Déterminer $E(T_n)$ et $V(T_n)$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} (V(T_n))$.
6. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire réelle certaine $2p$.

Exercice 3
Soit $(p_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels à valeurs dans $[0, 1]$ et soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ indépendantes. On suppose que $\forall i \in \mathbb{N}^*$, X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i.
Pour tout entier non nul n, on pose Y_n et m_n définies par: $Y_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ et $m_n = \dfrac{p_1 + \cdots + p_n}{n}$.
On suppose que la suite (m_n) converge vers un réel noté m.

1. Déterminer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (V(Y_n)) = 0$.
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(P(|Y_n - m_n| > \frac{\varepsilon}{2})\right) = 0$.
3. Montrer que pour n assez grand, $\Big(|Y_n - m| \geqslant \varepsilon\Big) \subset \Big(|Y_n - m_n| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big)$.
4. En déduire que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire réelle certaine m.

Exercice 4
Soit $p \in]0, 1[$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre p.
On pose pour out entier $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.

1. Montrer que $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers p.
2. Etudier la convergence en probabilité de la suite de variables aléatoires $\left(e^{\frac{S_n}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 5
Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$.
On note $M_n = max(U_1, \cdots, U_n)$ et $X_n = n(1 - M_n)$.

1. Déterminer la fonction de répartition F_n de M_n.
2. Montrer que la suite (M_n) converge en loi vers une variable aléatoire dont on déterminera la loi.
3. Déterminer la fonction de répartition G_n de X_n.
4. Etudier la convergence en loi de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 6
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de VAR où $X_n \hookrightarrow \mathcal{E}(\frac{1}{n})$ et $Y_n = X_n - \lfloor X_n \rfloor$.
Etudier la convergence en loi de la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 7
On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes strictement positives, définies sur le même espace probabilisé et qui suivent toutes une loi exponentielle de paramètre 1.
On note, pour tout entier naturel n non nul, $T_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de la variable T_n, pour tout entier naturel n.
2. Soit t un réel positif ou nul.
   (a) Justifier que $\forall n > t$, $\quad [T_n < t] \subset [\ |T_n - n| \geq n - t]$.
   (b) En déduire, grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, la valeur de $\lim_{n\to+\infty} (P(T_n < t))$.
3. En déduire que l'événement $\bigcap_{k=1}^{+\infty}(T_k < t)$ est un événement quasi-impossible.

Exercice 8
Soit λ un réel strictement positif.
Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, indépendantes suivantes toutes la même loi de Poisson de paramètre λ.

On note, pour tout entier naturel n non nul, $\overline{T_n} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} T_k$ et $Z_n = \sqrt{n}\,\dfrac{\overline{T_n} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$.
Montrer que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable suivant une loi que l'on précisera.

Exercice 9
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires et X et Y deux variables aléatoires, toutes définies sur un même espace probabilisé. On suppose que $X_n \xrightarrow{P} X$, que $Y_n \xrightarrow{P} Y$ et que de plus toutes ces variables aléatoires sont à valeurs strictement positives.
Montrer que $X_n.Y_n \xrightarrow{P} X.Y$

Exercice 10
Application du TCL
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi de Poisson de paramètre 1.
On note, pour tout entier naturel n non nul, $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ et $u_n = e^{-n}\sum_{i=0}^n \dfrac{n^i}{i!}$

1. Déterminer la loi de S_n ainsi que son espérance et sa variance.
2. Exprimer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le réel u_n en fonction de la variable aléatoire S_n.
3. A l'aide du TCL, en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 11
Application du TCL (2)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi définie par

$$X_n(\Omega) = [[-1, +\infty[[, \quad \forall k \in X_n(\Omega), \quad P(X_n = k) = \frac{e^{-1}}{(k+1)!}$$

Pour tout entier n non nul, on pose $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} X_j$.

1. Reconnaître la loi de $X_j + 1$. Déterminer la loi de S_n.
2. En utilisant le théorème limite central, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} (P(S_n \leqslant 0)) = \frac{1}{2}$.
3. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $t \longmapsto e^{-nt}$, exprimer $P(S_n \leqslant 0)$ à l'aide d'une intégrale.
4. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^n e^{-t}t^n\,dt\right) = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 12
Application du TCL (3)
Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{3}$.
On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

1. Rappeler la loi de S_n, puis exprimer $P\left(S_n \leqslant \frac{n}{3}\right)$ à l'aide d'une somme.
2. En utilisant le théorème limite central montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3^n}\sum\limits_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}\binom{n}{k}2^{n-k}\right) = \frac{1}{2}$.

Exercice 13
On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes strictement positives, définies sur le même espace probabilisé et qui suivent toutes une loi exponentielle de paramètre 1.
On note, pour tout entier naturel n non nul, $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

1. Déterminer l'espérance et la variance de la variable T_n, pour tout entier naturel n.
2. Soit t un réel positif ou nul.
   (a) Justifier que $\forall n > t, \quad (T_n < t) \subset (|T_n - n| \geq n - t)$.
   (b) En déduire, grâce à l'inégalité de Bienaymé-Tchebytchev, la valeur de $\lim_{n\to+\infty}(P(T_n < t))$.
3. En déduire que l'événement $\bigcap_{k=1}^{+\infty}(T_k < t)$ est un événement quasi-impossible.

Exercice 14
Centrage-réduction
On considère 1000 variables aléatoires réelles indépendantes $T_1, \dots T_{1000}$ définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, ayant toutes la même loi, une espérance égale à 3 et une variance égale à $\frac{1}{2}$.
On note $S = \dfrac{1}{1000}\sum_{i=1}^{1000} T_i$.
On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et on précise qu'une valeur approchée de $\Phi(\sqrt{5})$ est : $\Phi(\sqrt{5}) \simeq 0.987$
Déterminer une valeur approchée de la probabilité $P(2.95 < S \leq 3.05)$.

Exercice 15
Le 4L Trophy
Dans le désert, une Renault 4L crève en moyenne tous les 4000km. On considère donc qu'à chaque kilomètre, la probabilité de crever est de $\frac{1}{4000}$. Un équipage s'inscrit au 4L Trophy, rallye de 6000 km dans le désert. Il aimerait savoir combien de roues de secours emporter pour avoir moins de 10% de chances de manquer de roues de secours. Deux roues de secours sont-elles suffisantes ? faut-il en emporter trois ?

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de roues crevées pour une voiture participant au 4L Trophy. Reconnaître la loi de X.
2. On admet qu'on peut approximer X par une certaine loi de Poisson : voir le théorème correspondant du cours.
   On donne $e{-}3/2 \simeq 0.22$.
   Répondre alors à la question posée.

Exercice 16
Recherche de valeur approchée
On considère trois variables aléatoires X, Y, et Z indépendantes et suivant toutes une loi binômiale de paramètres 10 et 0.5.
On note $R = \frac{1}{3}X + \frac{1}{3}Y + \frac{1}{3}Z$.

1. Déterminer la loi de $X + Y + Z$.
2. On précise que $\Phi\left(\sqrt{\dfrac{6}{5}}\right) = 0.86$.
   En déduire une valeur approchée de la probabilité $P(R \geq 4)$.