Python td 9 - Méthode d'inversion pour les variables aléatoires discrètes

I. Méthode d'inversion discrète

I.1) Objectif

Soit X une variable discrète. On peut (ceci devrait être guidé par l'énoncé), connaissant la loi de X (ou sa fonction de répartition), utiliser `rand()` pour simuler X .

Exemple

Soit $p \in]0, 1[$ et $X \leftrightarrow \mathcal{B}(p)$. Simuler X à partir de l'instruction `rand()`.

I.2) Notations

On considère que $X(\Omega) = \{x_k, k \in [[1, n]]\}$ ou $X(\Omega) = \{x_k, k \in \mathbb{N}^*\}$.

On suppose que la suite (x_k) est strictement croissante : $x_1 < x_2 < \dots$.

On note, pour tout k ($k \in [[1, n]]$ ou $k \in \mathbb{N}^*$), $p_k = P(X = x_k)$ et $f_k = F_X(x_k)$.

On a donc pour tout k , $f_k = \sum_{i=1}^k p_i$. Notons que la suite (f_k) est strictement croissante.

I.3) Principe de la méthode de simulation par inversion (discrète)

1. On considère une VAR U suivant la loi $\mathcal{U}([0, 1])$ et la VARD Y où :

$$Y(\Omega) = X(\Omega) \text{ et pour tout } k \in [[1, n]] \text{ (ou } k \in \mathbb{N}^*), [Y = x_k \text{ est réalisé ssi } U \in]f_{k-1}, f_k]]$$

Justifier que Y et X ont la même loi.

2. Pour simuler Y , on simule U , on détermine la valeur de k telle que $U \in]f_{k-1}, f_k]$ et dans ce cas Y prend la valeur de x_k .

3. De façon plus savante, $Y = \sum_{k \in X(\Omega)} x_k \cdot 1_{U \in]f_{k-1}, f_k]}$

Exemple

Soit X une VARD telle que $X(\Omega) = \{1, 2, 3\}$ où $P(X = 1) = 0.2$, $P(X = 2) = 0.5$.

1. Déterminer la loi de X , calculer F_X .
2. Donner dans ce cas la définition de la variable Y .
3. Ecrire un script simulant X .

II. Loi de Poisson : simulation par inversion discrète

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

On note pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_k = P(X = k)$

et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k = F_X(k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^k p_i$.

1. Préciser p_0 et exprimer p_{k+1} en fonction de p_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. En utilisant la méthode d'inversion discrète, compléter le programme suivant, qui permet de fournir le paramètre λ , de simuler la variable X et d'afficher la valeur prise par X .

```
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
def poiss(L):
    U=
    k=
    p=
    f=p
    while
        k=
        p=
        f=
    return
```

```
L=input("lambda=")
print("X=",poiss(L))
```

3. Ecrire un programme utilisant la fonction précédente, qui demande λ puis qui simule 10000 fois la loi de Poisson de paramètre λ , qui calcule la moyenne des résultats obtenus et qui représente les résultats obtenus dans un histogramme.
4. On considère le programme suivant :

```
def loipoi(L,n): # L>0 et n entier >0
    p=np.exp(-L)
    P=[p]
    for k in range(1,n+1):
        p=p*L/k
        P.append(p)
    return P
```

Que renvoie cette fonction ?