Informatique : programmation en Python

En particulier :
Simulation de lois usuelles discrètes : uniforme, binomiale, Bernoulli, géométrique, Poisson.
Simulations de lois à densité : uniforme sur $[0, 1]$, uniforme sur $[a, b]$ en faisant une transformation affine, exponentielle, normale, petit gamma.
Méthode d'inversion (guidé) pour simuler une variable à densité.

Chapitre 10 - Vecteurs aléatoires

Réviser : toutes les lois usuelles (discrètes ou à densité), les théorèmes de stabilité pour les lois usuelles (par somme ou par combinaison linéaire).

- Couples de variables aléatoires : notion de loi conjointe.
- Théorème de transfert pour les couples de VARD : si X et Y sont deux VARD et $Z = g(X, Y)$ alors sous réserve de convergence,

$$E(Z) = \sum_{i \in X(\Omega), j \in Y(\Omega)} g(i, j) \cdot P([X = i] \cap [Y = j])$$

- Cas du produit : si X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors XY admet une espérance (*) (astuce à retenir !!) et

$$E(XY) = \sum_{i \in X(\Omega), j \in Y(\Omega)} ij \cdot P([X = i] \cap [Y = j])$$

Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$.

4. Covariance

- Définition : si deux VARD X et Y admettent un moment d'ordre 2, alors leur covariance est définie par $Cov(X, Y) = E((X - E(X))(X - E(Y)))$.
- Formule de Huygens pour la covariance : $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.
- $Cov(X, X) = V(X)$ et $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$
- On en déduit $Cov(X, Y) = \frac{1}{2}(V(X + Y) - V(X) - V(Y))$
- La covariance est une application bilinéaire symétrique et positive (mais pas définie positive !).
- Coefficient de corrélation linéaire : si X et Y admettent un moment d'ordre 2 alors

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$$

(lettre grecque rho)

- $|Cov(X, Y)| \leq \sqrt{V(X)} \cdot \sqrt{V(Y)}$ (à savoir démontrer *) : Cauchy-Schwarz pour la covariance.
On en déduit que $|\rho(X, Y)| \leq 1$.
On a $|\rho(X, Y)| = 1$ si et seulement si il existe deux réels $a \neq 0$ et b tels que l'on ait $Y = aX + b$ presque sûrement (i.e. $P(Y = aX + b) = 1$).

5. Vecteurs aléatoires

- Un vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ est la donnée de n VAR $X_1, \dots, X_n$.
Déterminer la loi du vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$, c'est déterminer la fonction $F_X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, où

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = P\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k \leq x_k]\right)$$

- Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ et $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ deux vecteurs aléatoires ayant la même loi.
Soit $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ (cf chapitre sur les fonctions de n variables).
Alors les deux variables $g(X_1, \dots, X_n)$ et $g(Y_1, \dots, Y_n)$ ont la même loi.
- Si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_k admet une espérance et si les variables X_k sont mutuellement indépendantes, alors $X_1 \cdot \dots \cdot X_n$ admet une espérance et

$$E(X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdot \dots \cdot E(X_n)$$

- Si pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_k admet un moment d'ordre 2 et si les X_k sont deux à deux indépendantes, alors $\sum_{i=1}^n X_i$ admet une variance et

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i)$$

6. Vecteurs aléatoires discrets

Soit $(X_k)_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une n -liste de VARD définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.
Cette n -liste est appelée **vecteur aléatoire discret**
Déterminer la loi du vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$, c'est donner, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$,

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k = x_k]\right)$$

Les lois de $X_1, \dots, X_n$ sont appelées lois marginales.

Chapitre 11 - Convergence de variables aléatoires (tout)

1. Inégalité de Markov et inégalité de Bienaymé-Tchebychev (rappel)

2. Convergence en probabilité

- Définition : On dit que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **converge en probabilité vers la variable aléatoire X** lorsque :

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|X_n - X| \geq \epsilon) = 0$$

On note alors $X_n \xrightarrow{P} X$.

- Méthode : on utilise souvent (mais pas toujours) l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- Si la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X , et si la fonction f est **continue** sur $\mathbb{R}$, alors la suite $(f(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers $f(X)$.
- (Nouveau) si $X_n \xrightarrow{P} X$ et $Y_n \xrightarrow{P} Y$ alors $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$.

(e) **Loi faible des grands nombres (*)**

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles.

Notons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

Si :

- les variables X_n sont **indépendantes**,
- elles admettent toutes la **même espérance** notée m et la **même variance** notée σ^2 ,

alors la suite $(\overline{X}_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la variable aléatoire certaine égale à m :

$$X_n \xrightarrow{P} m$$

3. Convergence en loi

(a) **Définition via la fonction de répartition. Cas des VARD à valeurs dans $\mathbb{N}$: on utilise la loi.**

(b) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de VARD de loi $\mathcal{B}(n, \frac{\lambda}{n})$. Alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ où $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

Preuve guidée à savoir refaire : (*)

i. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.

ii. En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

(c) Si la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers X , et si la fonction f est **continue** sur $\mathbb{R}$, alors la suite $(f(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers $f(X)$.

4. Théorème Central Limite

(a) Le T.C.L

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires.

Soit m un réel et σ un réel strictement positif.

On suppose que :

- les variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont indépendantes,
- les variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont identiquement distribuées (elles suivent la même loi),
- toutes ces variables aléatoires admettent une même espérance m et une même variance notée σ^2 .

On note : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$. La variable aléatoire centrée réduite associée à $\overline{X}_n$ est :

$$\overline{X}_n^* = \frac{\overline{X}_n - E(\overline{X}_n)}{\sqrt{V(\overline{X}_n)}} = \sqrt{n} \left(\frac{\overline{X}_n - m}{\sigma} \right)$$

Alors

la suite $(\overline{X}_n^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire qui suit une loi normale centrée réduite.

$$\overline{X}_n^* \xrightarrow{\mathcal{L}} Y \quad \text{où } Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

(b) Convergence de la loi binômiale vers la loi normale : à savoir retrouver en étant un peu guidé.

(c) Convergence de la loi de Poisson vers la loi normale : à savoir retrouver en étant un peu guidé.

(*) : **preuve exigible**