Corrigé Ex. 11 chap. 11

1. Soit $j \in \mathbb{N}^*$. Comme $X_j(\Omega) = [[-1;+\infty[[$, on a $(X_j+1)(\Omega) = \mathbb{N}$. De plus pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X_j+1=k) = P(X_j=k-1) = \frac{e^{-1}}{k!}$$

Donc $X_j + 1 \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$.

Par coalition, les variables X_1+1, ..., X_n+1 sont indépendantes, donc $S_n + n = \sum_{j=1}^n (X_j+1) \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$.

Ensuite, $S_n(\Omega) = [[-n,+\infty[[$, et pour tout $k \in [[-n,+\infty[[$,

$$P(S_n=k) = P(S_n+n=n+k) = \frac{n^{n+k}}{(n+k)!}.e^{-n}$$

De plus, $E(S_n) = E(S_n+n-n) = E(S_n+n) - n = n-n = 0$ puisque $(S_n+n) \hookrightarrow \mathcal{P}(n)$.
De même $V(S_n) = V(S_n+n) = n$.

2. On peut considérer la variable $\overline{X}_n = \frac{1}{n}.\sum_{k=1}^n X_k = \frac{1}{n}.S_n$. On a alors $E(\overline{X}_n) = \frac{1}{n}.E(S_n) = 0$ et $V(\overline{X}_n) = \frac{1}{n^2}.V(S_n) = \frac{1}{n}$. La variable centrée réduite associée est alors

$$\overline{X}_n^* = \frac{\overline{X}_n - 0}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.S_n$$

Comme les variables X_1, ..., X_n sont indépendantes, de même loi, espérance, variance, d'après le TCL,

$$\overline{X}_n^* \xrightarrow{P} N \quad \text{où } N \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Donc

$$\frac{1}{\sqrt{n}}.S_n \xrightarrow{P} N$$

Enfin,

$$P(S_n \leq 0) = P(\frac{1}{\sqrt{n}}.S_n \leq 0) \to_{n\to+\infty} P(N \leq 0) = \Phi(0) = \frac{1}{2}$$

3. D'une part,

$$\begin{aligned} P(S_n \leq 0) &= \sum_{k=-n}^{0} P(S_n=k) \\ &= \sum_{k=-n}^{0} \frac{n^{n+k}}{(n+k)!}.e^{-n} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \frac{n^i}{i!}.e^{-n} \quad \text{en posant } i=n+k \end{aligned}$$

D'autre part, soit $f : t \mapsto e^{-nt}$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on peut donc appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction f, à l'ordre n, entre 0 et x. On remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(0) = (-n)^k.e^{-nt}$. D'où

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(0).\frac{x^k}{k!} + \int_0^x f^{(n+1)}(t).\frac{(x-t)^n}{n!}dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-n)^k.\frac{x^k}{k!} + \int_0^x (-n)^{n+1}.e^{-nt}\frac{(x-t)^n}{n!}dt \end{aligned}$$

D'où en posant $x=-1$,

$$\begin{aligned} & e^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} + \int_0^{-1} (-n)^{n+1}..e^{-nt}\frac{(-1-t)^n}{n!}dt \\ \Leftrightarrow \quad & 1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.e^{-n} + \int_0^{-1} (-n)^{n+1}.e^{-n(t+1)}\frac{(-1-t)^n}{n!}dt \end{aligned}$$

Or cette dernière intégrale peut être exprimée sous la forme

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{-1} (-n)^{n+1}.e^{-n(t+1)}\frac{(-1-t)^n}{n!}dt \\ &= (-1)^{2n+1}.\int_0^{-1} \frac{(1+t)^n}{n!}.n^{n+1}.e^{-n(t+1)}dt \\ &= \int_{-1}^{0} \frac{(1+t)^n}{n!}.n^{n+1}.e^{-n(t+1)}dt \\ &= \frac{n^{n+1}}{n!}.\int_0^1 u^n.e^{-nu}du \end{aligned}$$

où on obtient cette dernière égalité via le CDV $u = 1+t$ qui est affine donc autorisé.

Posons enfin $x = nu$, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \frac{n^{n+1}}{n!}.\int_0^n (\frac{x}{n})^n.e^{-x}.\frac{1}{n}dx \\ &= \frac{1}{n!}.\int_0^n x^n.e^{-x}dx \end{aligned}$$

Enfin, on en déduit que

$$1 = P(S_n \leq 0) + \frac{1}{n!}..\int_0^n x^n.e^{-x}dx$$

D'où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!}.\int_0^n x^n.e^{-x}dx = \lim_{n\to+\infty} 1 - P(S_n \leq 0) = \frac{1}{2}$$