

---

# DM n° 11 - pour le 10/02/25

## 2 exercices Edhec 2021

---

Réviser le chapitre 11 (convergence de VAR), puis cherchez ce sujet en 2h30 maxi. Devoir en auto-correction, un corrigé sera posté le 11/02

### Exercice 1 : analyse

1. Question préliminaire : on considère une suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  croissante et de limite  $\ell$  et on pose, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k$$

- (a) Établir, pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'inégalité  $b_n \leq a_n$ , puis étudier la monotonie de la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .
- (b) Montrer que la suite  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers un réel  $\ell'$  qui vérifie  $\ell' \leq \ell$ .
- (c) Établir, pour tout entier naturel  $n$  non nul, l'inégalité suivante :

$$b_{2n} \geq \frac{b_n + a_n}{2}$$

- (d) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ .

On se propose maintenant d'étudier la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , définie par la donnée de  $u_0 = 1$  et par la relation, valable pour tout entier naturel  $n$  :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$$

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on pose  $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ .

2. (a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n$  est bien défini et supérieur ou égal à 1.
- (b) Étudier les variations de la suite  $(u_n)$ , puis établir que la suite  $(u_n)$  diverge et donner sa limite.
- (c) Compléter le script Python suivant afin qu'il permette de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de  $n$  pour laquelle on a  $S_n > 1000$ .

```
n=1
u=1
S=1 #S_1=u0=1
while S<=1000:
    u=.....
    S=.....
    n=n+1
print(.....)
```

3. Recherche d'un équivalent de  $u_n$ .

- (a) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = \frac{1}{2}$ .
- (b) Étudier les variations de la fonction  $f$  définie sur  $[1, +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$ , puis en déduire que la suite  $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
- (c) Utiliser la première question pour établir que :  $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{2}$ .

4. (a) Exprimer  $S_n$  en fonction de  $u_n$  puis en déduire un équivalent de  $S_n$  pour  $n$  au voisinage de  $+\infty$ .
- (b) Compléter le script Python suivant afin qu'il fasse le même travail que celui de la question 2c) sans calculer  $S_n$  :

```
n=0
u=1 #u0=1
while u<=.....:
    u=.....
    n=n+1
print(.....)
```

### Exercice 2 : probabilités

1. On considère une variable aléatoire  $Z$  suivant la loi normale centrée réduite. On pose  $Y = e^Z$  et on admet que  $Y$  est une variable aléatoire à densité. On note  $F_Y$  la fonction de répartition de  $Y$  et  $\Phi$  celle de  $Z$ .

- (a) Déterminer  $F_Y(x)$  pour tout réel  $x$  négatif ou nul, puis exprimer  $F_Y(x)$  à l'aide de la fonction  $\Phi$  pour tout réel  $x$  strictement positif.
- (b) En déduire qu'une densité  $f_Y$  de  $Y$  est donnée par :

$$f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x)^2}{2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Dans la suite, on considère une suite de variables aléatoires  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , toutes définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi, dite de Rademacher de paramètre  $p$  (avec  $0 < p < 1$ ), et définie par :

$$P(X_n = 1) = p \quad \text{et} \quad P(X_n = -1) = 1 - p$$

On considère de plus, pour  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , la variable aléatoire  $T_n = \prod_{k=1}^n X_k$ .

2. (a) Donner l'espérance et la variance communes aux variables  $X_n$ .
- (b) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par  $T_n$  puis calculer  $E(T_n)$  et en déduire une relation entre  $P(T_n = 1)$  et  $P(T_n = -1)$ .
- (c) Écrire une autre relation vérifiée par  $P(T_n = 1)$  et  $P(T_n = -1)$ , puis en déduire la loi de  $T_n$ .
- (d) Montrer que la suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers une variable  $T$  dont on précisera la loi.

3. Soit  $T'$  une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que les variables  $X_n$ .

(a) Établir l'inclusion suivante :

$$\left(|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2}\right) \cap \left(|T_n - T'| < \frac{1}{2}\right) \subset (|T_{n+1} - T_n| < 1)$$

(b) En déduire l'inégalité :

$$P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) \leq P\left(|T_{n+1} - T'| \geq \frac{1}{2}\right) + P\left(|T_n - T'| \geq \frac{1}{2}\right)$$

(c) Montrer, en observant les valeurs que peut prendre la variable  $T_{n+1} - T_n$ , que :

$$P(|T_{n+1} - T_n| \geq 1) = 1 - p$$

(d) La suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge-t-elle en probabilité ?

4. Dans cette question on prend  $p = \frac{1}{2}$ .

On considère, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , les variables aléatoires  $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$  et  $U_n = e^{n\bar{X}_n}$ .

(a) On rappelle que  $\bar{X}_n^*$  est la variable aléatoire centrée réduite associée à  $\bar{X}_n$ . Exprimer  $\bar{X}_n^*$  en fonction de  $\bar{X}_n$ .

(b) Utiliser le théorème limite central pour établir que la suite  $(U_n^{1/\sqrt{n}})_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge en loi vers une variable aléatoire de même loi que  $Y$ .