Chapitre 13 - Formes quadratiques - Cours et Exercices

I. Forme quadratique associée à une matrice symétrique

Définition I.1
Soit A une matrice carrée symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On appelle **forme quadratique associée à** A, l'application q_A de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$q_A : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & q_A((x_1,\dots,x_n)) = {}^tXAX \text{ où } X \text{ désigne la matrice-colonne } \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

Définition I.2
Forme quadratique associée à un endomorphisme symétrique (HP)

Soit E un espace euclidien de dimension supérieure ou égale à 1.

Soit f un endomorphisme symétrique de E.
On appelle *forme quadratique associée à* f, l'application q_f de E dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$q_f : \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & q_f(x) = \langle x, f(x) \rangle \end{array}$$

Si f est un endomorphisme symétrique de E et si A est la matrice de f dans une base **orthonormale** $\mathcal{B}$ alors :

$$\forall x \in E, \quad q_f(x) = {}^tXAX \quad \text{où } X \text{ désigne la matrice-colonne des coordonnées de } x \text{ dans } \mathcal{B}$$

Proposition I.1
Soit A une matrice carrée **symétrique** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.On note $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ 1 \leqslant i \leqslant n}}$
Soit q la forme quadratique associée à la matrice A.
Soit $x = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées du vecteur x dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

$$q(x) = {}^tXAX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}x_i^2 + 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j}x_ix_j$$

Remarque
Pour écrire la forme quadratique associée à une matrice A, il est donc inutile de calculer le produit matriciel ${}^tXAX$. Il suffit de procéder de la manière suivante:

- pour tout $i \in [[1,n]]$, on met devant x_i^2 le coefficient $a_{i,i}$ de la matrice A.
- pour tout couple $(i,j) \in [[1,n]]^2$ tel que $i < j$, on met devant x_ix_j le **double** du coefficient $a_{i,j}$ de la matrice A.

Exercice 1
1. On note $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Ecrire la forme quadratique q associée à la matrice A.
2. On note $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice remplie de 1. Ecrire la forme quadratique q_J associée à J.

Remarque
- $\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in \mathbb{R}, q_A(\lambda.x) = \lambda^2.q_A(x)$.
  Si $x \neq 0$, q_A garde donc un signe constant sur la droite $Vect(x)$.
- Soit $u = (u_1, \cdots, u_n)$ et $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
  Si U est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, alors $q_A(u) = \lambda. \|u\|^2$.

II. Signe d'une forme quadratique.

Théorème II.1
Soit q_A la forme quadratique associée à une matrice symétrique réelle A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q_A(x) \geqslant 0 \iff$ les valeurs propres de A sont toutes positives
  On dit dans ce cas que **la forme quadratique** q_A **est positive**.
- $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ q_A(x) \leqslant 0 \iff$ les valeurs propres de A sont toutes négatives
  On dit dans ce cas que **la forme quadratique** q_A **est négative**.
- $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\},\ q_A(x) > 0 \iff$ les valeurs propres de A sont toutes strictement positives.
  On dit dans ce cas que **la forme quadratique** q_A **est définie positive**.
- $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\},\ q_A(x) < 0 \iff$ les valeurs propres de A sont toutes strictement négatives.
  On dit dans ce cas que **la forme quadratique** q_A **est définie négative**.
- Si A admet une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative, alors $\exists (x,x')\ (\mathbb{R}^n)^2,\ q_A(x) < 0$ et $q_A(x') > 0$.
  Autrement dit la forme quadratique q_A change de signe.

En pratique, obtention du signe d'une forme quadratique :

Pour étudier le signe de la forme quadratique q_A on pourra :
- **Méthode 1** : écrire $q_A(x)$ comme une combinaison linéaire de carrés;
- **Méthode 2** : chercher les valeurs propres de la matrice A et conclure avec les théorèmes précédents.

La première méthode est bien plus rapide et préférable si on peut l'appliquer.

Pour montrer que q change de signe : commencer par essayer de calculer des valeur particulières.

Exercice 2
On considère la forme quadratique $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, où $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4xz$.
Montrer que q change de signe.

Exercice 3
On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Ecrire la forme quadratique q associée à la matrice A.
2. Déterminer les valeurs propres de la matrice A.
3. En déduire le signe de la forme quadratique associée à la matrice A.
4. Retrouver ce dernier résultat en faisant apparaître une somme de carrés.

Exercice 4
On considère la matrice symétrique $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la forme quadratique q_A. Démontrer que cette forme quadratique est positive.
2. Montrer que q_A admet en $(0, 0, 0)$ un minimum absolu strict.
3. Prouver que q_A n'est pas majorée. Que peut-on dire quand aux extrema de q_A ?
4. Prouver que l'application φ où
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x, y) = {}^tX.A.Y$$
définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5
Soit $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, où pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $q(x) = \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une forme quadratique et donner sa matrice associée.
2. Etudier les extrema de q.

Exercice 6
Dans chaque cas, vérifier que q est une forme quadratique et préciser la matrice A associée. Etudier le signe de la forme quadratique q.

1. Soit l'application $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, où $q(x, y, z) = 2x^2 + z^2 + 2xy + 4yz$.
2. Soit l'application $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, où $q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz + 2yz$.

Exercice 7
Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

1. Soit l'application $q_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, où pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $q_1(x) = \sum_{(i,j) \in [[1,n]]^2} x_i x_j$.
Vérifier que q_1 est une forme quadratique et préciser la matrice A associée. Etudier le signe de la forme quadratique q_1 et déterminer les vecteurs x tels que $q_1(x) = 0$.
Etudier les extremums de q_1.
2. Soit l'application $q_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, où pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $q_2(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i . x_j$.
Vérifier que q_2 est une forme quadratique et préciser la matrice B associée. Donner la trace de B.
Justifier que q_2 change de signe.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, où pour tout $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $q(x) = \alpha . \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2 . \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i . x_j$.
Etudier le signe de q.

Exercice 8
La matrice de Hilbert

La lettre n désigne un entier naturel non nul et on considère la matrice $H = (h_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ définie par:

$$\forall (k, j) \in [[1, n]]^2, \ h_{k,j} = \frac{1}{k + j - 1}, \qquad H = \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

1. Calculer, pour tout $(k, j) \in [[1, n]]^2$, $\int_0^1 t^{k+j} dt$.
2. (a) Vérifier que H est une matrice symétrique réelle.
On note q la forme quadratique associée à H
(b) Montrer que $\forall x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \quad q(x) = \int_0^1 \left(x_0 + x_1 t + x_2 t^2 + \ldots x_{n-1} t^{n-1} \right)^2 \ dt$.
(c) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0_{\mathbb{R}^n}\} \quad q(x) > 0$.
3. En déduire que H est une matrice inversible dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.