Corrigé du DM n° 10 - pour le 27/01/2025

Exercice 1

Partie I : étude d'un cas particulier

Dans cette partie uniquement, $n = 2$ et a est un réel fixé.

$$Mat_{\mathcal{C}}(u) = A = \frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} \text{ et } Mat_{\mathcal{C}}(v) = B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Les matrices A et B sont clairement symétriques. De plus, par des calculs rapides on vérifie que $A^2 = A$ et $B^2 = B$. Les endomorphismes u et v sont donc des projecteurs, qui sont aussi des endomorphismes symétriques. D'après le cours, $\boxed{u \text{ et } v \text{ sont des projecteurs orthogonaux}}$

2. $$rg(v) = rg(B) = dim(Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = 1$$
$$rg(u) = rg(A) = dim(Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a^2 \end{pmatrix}) = dim(Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}) = 1$$
De plus,
$$Mat_{\mathcal{C}}(u \circ v) = \frac{1}{2(1+a^2)}\begin{pmatrix} 1+a & 1+a \\ a+a^2 & a+a^2 \end{pmatrix}$$
Attention, si $a = -1$ alors cette matrice est nulle et donc $rg(u \circ v) = 0$.
Si $a \neq -1$, les deux colonnes étant non nulles et égales, on a $\boxed{rg(u \circ v) = 1}$

3. (a)
$$Mat_{\mathcal{C}}(u \circ v(x)) = \frac{1}{2(1+a^2)}\begin{pmatrix} 1+a & 1+a \\ a+a^2 & a+a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} = \frac{1}{2(1+a^2)}\begin{pmatrix} (1+a)^2 \\ a(1+a)^2 \end{pmatrix} = \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}.\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$
donc $\boxed{x = (1, a) \text{ est bien un vecteur propre de } u \circ v}$

   (b) On a déjà vu que si $a = -1$, $u \circ v = 0$ donc $Spec(u \circ v) = \{0\}$.
Supposons que $a \neq -1$. Comme $rg(u \circ v) = 1 \neq 2$, on a $0 \in Spec(u \circ v)$. De plus, d'après la question précédente, $\frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} \in Spec(u \circ v)$ et $\frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} \neq 0$ (car $a \neq -1$). Enfin, $u \circ v$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ donc possède au plus 2 valeurs propres distinctes. Par conséquent,
$$Spec(u \circ v) = \{0, \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}\}$$
Pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$$(1+a)^2 - 2(1+a^2) = -1+2a-a^2 = -(1-a)^2 \leq 0 \Rightarrow (1+a)^2 \leq 2.(1+a^2) \Rightarrow \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} \leq 1$$
On a donc bien $\boxed{Spec(u \circ v) \subset [0, 1]}$

   (c) $u \circ v$ est un projecteur ssi sa matrice vérifie $(AB)^2 = AB$. On trouve que $(AB)^2 = \frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)}.AB$. Si $a = -1$ alors $AB = 0$, donc $(AB)^2 = (AB) = 0$ et $a = -1$ convient. Sinon, la relation est vraie ssi
$$\frac{(1+a)^2}{2(1+a^2)} = 1 \Leftrightarrow 1+2a+a^2 = 2+2a^2 \Leftrightarrow a^2-2a+1 = 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1$$
Finalement, $\boxed{u \circ v \text{ est un projecteur ssi } a = -1 \text{ ou } a = 1}$

Partie II : cas général

On suppose que $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$. Soit u et v deux projecteurs orthogonaux de E.

1. Soit p un projecteur orthogonal de E.

   (a) Pour tout $x \in E$,
$$\|p(x)\|^2 = \langle p(x), p(x)\rangle = \langle p \circ p(x), x\rangle = \langle p(x), x\rangle$$
car p est un endomorphisme symétrique et un projecteur. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a alors
$$\|p(x)\|^2 = \langle p(x), x\rangle \leq \|p(x)\| . \|x\|$$

   (b) Si $\|p(x)\| = 0$, la relation demandée est évidente. Si $\|p(x)\| \neq 0$ alors $\|p(x)\| > 0$ et en divisant par $\|p(x)\|$ dans la relation précédente, on obtient que $\boxed{\|p(x)\| \leq \|x\|}$

2. D'après ce qui précède, comme u et v sont deux projecteurs orthogonaux,
$$\forall x \in E, \quad \|u \circ v(x)\| \leq \|v(x)\| \leq \|x\|$$
Soit λ une valeur propre de $u \circ v$ et x un vecteur propre associé ($x \neq 0$). On a alors $\|u \circ v(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ d'où $|\lambda|. \|x\| \leq \|x\|$. Comme $\|x\| > 0$ (car $x \neq 0$), on a bien $|\lambda| \leq 1$.
Bilan : $\boxed{Spec(u \circ v) \subset [-1, 1]}$

3. (a) Pour tout $(x, y) \in E^2$,
$$\langle f(x), y\rangle = \langle v \circ u \circ v(x), y\rangle = \langle u \circ v(x), v(y)\rangle = \langle v(x), u \circ v(y)\rangle = \langle x, f(y)\rangle$$
en utilisant de proche en proche le fait que u et v sont symétriques.

   (b) Soit μ une valeur propre de f associée au vecteur propre x_0.
$$\begin{aligned} \|(u \circ v)(x_0)\|^2 &= \langle u \circ v(x_0), u \circ v(x_0)\rangle = \langle v(x_0), u \circ u \circ v(x_0)\rangle \\ &= \langle v(x_0), u \circ v(x_0)\rangle \quad \text{car } u \text{ projecteur} \\ &= \langle x_0, v \circ u \circ v(x_0)\rangle \\ &= \mu \|x_0\|^2 \end{aligned}$$
Comme encore une fois $\|x_0\| \neq 0$, on a $\mu = \frac{\|(u \circ v)(x_0)\|^2}{\|x_0\|^2} \geq 0$.

(c) Comme f est un endomorphisme symétrique, il existe une BON de E formée de vecteurs propres de f. Il existe donc $(u_1, \cdots, u_n)$ une BON de E telle que pour tout $i \in [[1,n]]$, $f(u_i) = \mu_i.u_i$ où $\mu_i \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in E$, et $x = \sum_{i=1}^n x_i.u_i$ sa décomposition dans cette BON. On a alors

$$\begin{aligned} \langle f(x), x\rangle &= \left\langle f(\sum_{i=1}^n x_i u_i), \sum_{j=1}^n x_j u_j \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^n x_i.\mu_i u_i, \sum_{j=1}^n x_j u_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mu_i x_i x_j \langle u_i, u_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_i.x_i^2.\|u_i\|^2 \quad \text{car} \quad \langle u_i, u_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{\text{pour tout } x \in E,\ \langle f(x), x\rangle \geq 0}$

Remarque : on pouvait aussi passer par les matrices : il existe une BON de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.

4. Soit λ une valeur propre non nulle de $u \circ v$ associée au vecteur propre x_1. Alors

$$f(v(x_1)) = v \circ u \circ v \circ v(x_1) = v \circ u \circ v(x_1) = v(\lambda x_1) = \lambda.v(x_1)$$

Supposons que $v(x_1) = 0$. Alors on aurait $u \circ v(x_1) = 0$ donc $\lambda = 0$: absurde.
Donc $v(x_1) \neq 0$, et avec la relation ci-dessus, on peut affirmer que $v(x_1)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ.

5. Soit $\lambda \in Spec(u \circ v)$. On sait déjà d'après le 2. que $\lambda \in [-1, 1]$.
Supposons $\lambda \neq 0$, d'après le 4., λ est aussi une valeur propre de f, donc est positive d'après le 3.(b).

Bilan : $\boxed{Spec(u \circ v) \subset [0, 1]}$

Exercice 2

1. (a) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{H}(n) : "Y_n = \sum_{k=0}^n \frac{X_k}{2^{n+1-k}}"$$

- Initialisation : si $n = 0$, on a $Y_0 = \frac{X_0}{2}$ donc le résultat est vrai.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(n)$ vraie. Alors

$$Y_{n+1} = \frac{X_{n+1}}{2} + \frac{1}{2}.\sum_{k=0}^n \frac{X_k}{2^{n+1-k}} = \frac{X_{n+1}}{2} + \sum_{k=0}^n \frac{X_k}{2^{n+2-k}} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{X_k}{2^{n+2-k}}$$

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}(n)$ vraie.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [[1,n]]$, X_k admet une espérance, donc Y_n est combinaison linéaire de variables admettant une espérance, donc Y_n admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \sum_{k=0}^n E(\frac{X_k}{2^{n+1-k}}) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{n+1-k}}.E(X_k) \\ &= m.\sum_{i=0}^n (\frac{1}{2})^{i+1} = m.\frac{1}{2}.\frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{\frac{1}{2}} \\ &= m.(1 - (\frac{1}{2})^{n+1}) \end{aligned}$$

Remarque : si $n = 0$ on retrouve bien que $E(Y_0) = \frac{1}{2}E(X_0)$.

Par ailleurs, les variables X_k sont indépendantes, donc par coalition, les variables $(\frac{X_k}{2^{n+1-k}})$ sont indépendantes. Comme ces variables admettent une espérance, Y_n aussi et

$$\begin{aligned} V(Y_n) &= \sum_{k=0}^n (\frac{1}{2^{n+1-k}})^2.V(X_k) \\ &= \sigma^2.\sum_{k=0}^n (\frac{1}{4})^{n+1-k} \\ &= \sigma^2.\frac{1}{4}.\sum_{i=0}^n (\frac{1}{4})^i \\ &= \frac{\sigma^2}{4}.\frac{1-(\frac{1}{4})^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} \\ &= \frac{\sigma^2}{3}.(1 - (\frac{1}{4})^{n+1}) \end{aligned}$$

Remarque : si $n = 0$, on voit que $\frac{\sigma^2}{3}(1 - \frac{1}{4}) = \frac{\sigma^2}{4} = V(Y_0)$.

On déduit de ces résultats que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} E(Y_n) = m}$ et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} V(Y_n) = \frac{\sigma^2}{3}}$

3. <u>Cas particulier :</u> on suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et on note Φ la fonction de répartition de X.

(a)
```
import numpy.random as rd
import numpy as np
n=int(input("n="))
X=rd.normal(0,1,n+1) #matrice des (X_0,...,X_n)
Y=np.zeros(n+1)
Y[0]=X[0]/2     # on définit Y0
for k in range(1,n+1):
    Y[k]=Y[k-1]/2+X[k]/2  # on définit Y_k
print("Yn=",Y[n])
S=(1/n)*np.sum(Y)
print("Sn=",S)
```

(b) Y_n est une combinaison linéaire de variables indépendantes suivant toutes une loi normale. D'après le cours, Y_n suit également une loi normale. De plus, avec $m=0$ et $\sigma=1$, d'après le 1.(b), on a

$$E(Y_n) = m.(1-(\frac{1}{2})^{n+1}) = 0 \;\text{ et }\; V(Y_n) = \frac{\sigma^2}{3}.(1-(\frac{1}{4})^{n+1}) = \frac{1}{3}(1-(\frac{1}{4})^{n+1})$$

<u>Bilan :</u> $\boxed{Y_n \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \frac{1}{3}.(1-(\frac{1}{4})^{n+1}))}$

Notons $\sigma_n^2 = \frac{1}{3}.(1-(\frac{1}{4})^{n+1})$ et donc $\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{3}.(1-(\frac{1}{4})^{n+1})}$. On a alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$F_{Y_n}(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sigma_n.\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{t^2}{2\sigma_n^2}}dt$$

Posons $u=\frac{t}{\sigma_n}$. Ce changement de variables est autorisé, $dt = \frac{1}{\sigma_n}dt$ et on obtient

$$F_{Y_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sigma_n}} e^{-\frac{u^2}{2}}.du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sigma_n}} e^{-\frac{u^2}{2}}du = \Phi(\frac{x}{\sigma_n})$$

Or $\lim_{n\to+\infty}\frac{x}{\sigma_n} = \sqrt{3}.x$, d'où $\lim_{n\to+\infty} F_{Y_n}(x) = \Phi(\sqrt{3}.x)$. La variable Z ayant pour fonction de répartition $x\mapsto \Phi(\sqrt{3}.x)$ est à densité, et une de ses densités est donnée par : $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$f_Z(x) = \sqrt{3}.\Phi'(\sqrt{3}.x) = \sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{3.x^2}{2}}dx = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}}.\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{x^2}{2.(\frac{1}{\sqrt{3}})^2}}$$

donc $Z\hookrightarrow \mathcal{N}(0,\frac{1}{3})$.

<u>Bilan :</u> $\boxed{(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge en loi vers } Z, \text{ où } Z\hookrightarrow\mathcal{N}(0,\frac{1}{3})}$

4. **Retour au cas général**

(a) La variable S_n est combinaison linéaire des variables Y_k qui admettent toutes une espérance, donc S_n admet une espérance.

$$\begin{aligned} E(S_n) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}E(Y_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} m.(1-(\frac{1}{2})^{k+1}) \\ &= \frac{1}{n}.m.n - \frac{m}{n}.\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{2})^{k+1} \\ &= m - \frac{m}{n}.(\frac{1}{4}).\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{2})^k \\ &= m - \frac{m}{n}.\frac{1}{4}.\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}} \\ &= m - \frac{m}{2n}.(1-(\frac{1}{2})^n) \end{aligned}$$

Donc $L = \lim_{n\to+\infty} S_n = m$

S_n est combinaison linéaire de variables discrètes admettant une variance, donc S_n admet une variance.

(b) Soit $(i,j)\in\mathbb{N}^2$ avec $i<j$. Par bilinéarité de la covariance,

$$\begin{aligned} Cov(Y_i,Y_j) &= Cov(\sum_{k=0}^{i}\frac{X_k}{2^{i+1-k}}, \sum_{l=0}^{j}\frac{X_l}{2^{j+1-l}}) \\ &= \sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j}\frac{1}{2^{i+1-k}}.\frac{1}{2^{j+1-l}}\,Cov(X_k,X_l) \end{aligned}$$

Comme les variables (X_i) sont indépendantes, on a $Cov(X_k,X_l)=0$ si $k\neq l$. Comme de plus $i<j$, on obtient

$$\begin{aligned} Cov(Y_i,Y_j) &= \sum_{k=0}^{i}\frac{1}{2^{i+1-k}}.\frac{1}{2^{j+1-k}}V(X_k) \\ &= \sigma^2.\frac{1}{2^{i+j+2}}.\sum_{k=0}^{i}\frac{1}{2^{-2k}} \\ &= \frac{\sigma^2}{2^{i+j+2}}.\sum_{k=0}^{i}4^k \\ &= \frac{\sigma^2}{2^{i+j+2}}.\frac{1-4^{i+1}}{1-4} \\ &= \frac{\sigma^2}{3}.\frac{1}{2^{i+j+2}}(4^{i+1}-1) \end{aligned}$$

(c) Soit $(i,j)\in\mathbb{N}^2$.

- **1er cas :** si $i < j$, d'après la question précédente,

$$\begin{aligned} Cov(Y_i, Y_j) &\leq \frac{\sigma^2}{3}.\frac{4^{i+1}}{2^{i+j+2}} \\ &\leq \frac{\sigma^2}{3}.\frac{2^{2i+2}}{2^{i+j+2}} \\ &\leq \frac{\sigma^2}{3}.\frac{1}{2^{j-i}} \end{aligned}$$

- **2ème cas :** si $j < i$ par raisons de symétrie on obtient

$$Cov(Y_i, Y_j) = Cov(Y_j, Y_i) \leq \frac{\sigma^2}{3}.\frac{1}{2^{i-j}}$$

- **3ème cas :** si $i = j$, alors

$$Cov(Y_i, Y_i) = V(Y_i) = \frac{\sigma^2}{3}(1 - (\frac{1}{4})^{n+1}) \leq \frac{\sigma^2}{3}$$

Bilan : $\boxed{\text{pour tout } (i,j) \in \mathbb{N}^2, \text{ on obtient bien : } Cov(Y_i, Y_j) \leq \frac{\sigma^2}{3}.\frac{1}{2^{|j-i|}}}$

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (\frac{1}{2})^{j-i} &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} (\frac{1}{2}))^{j-i} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{j-1} (\frac{1}{2})^k \quad \text{en posant } k = j - i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1 - (\frac{1}{2})^j}{1 - \frac{1}{2}} \\ &\leq 2.\sum_{j=1}^{n} 1 \\ &\leq 2n \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (\frac{1}{2})^{j-i} \leq 2n}$

(e) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} V(S_n) &= \frac{1}{n^2}.V(\sum_{k=1}^{n} Y_k) \\ &= \frac{1}{n^2}.Cov(\sum_{i=1}^{n} Y_i, \sum_{j=1}^{n} Y_j) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} Cov(Y_i, Y_j) \\ &\leq \frac{1}{n^2}.\frac{\sigma^2}{3}. \sum_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \frac{1}{2^{|j-i|}} \\ &\leq \frac{1}{n^2}.\frac{\sigma^2}{3}.(\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{1}{2^{j-i}} + \sum_{1 \leq j < i \leq n} \frac{1}{2^{i-j}} \\ &\leq \frac{1}{n^2}.\frac{\sigma^2}{3}.(\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{1}{2^{j-i}} + \sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \frac{1}{2^{i-j}} \quad \text{on rajoute des termes} \\ &\leq \frac{1}{n^2}.\frac{\sigma^2}{3}.(2n + 2n) \quad \text{par raisons de symétrie} \\ &\leq \frac{4\sigma^2}{3n} \end{aligned}$$

Finalement, comme $V(S_n) \geq 0$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{4\sigma^2}{3n} = 0$, on a $\lim_{n \to +\infty} V(S_n) = 0$.

Bilan : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} V(S_n) = 0}$

Exercice 3 (facultatif)

1. La fonction f est positive, continue sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt &= \int_{-1}^{1} (1 - |x|)dx \\ &= 2.\int_{0}^{1} (1 - x)dx \text{ par parité} \\ &= 2.[x - \frac{x^2}{2}]_0^1 = 2.(1 - \frac{1}{2}) = 1 \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité}}$

Remarquons qu'il s'agit de la loi de Xenakis, étudiée en DS !

2. (a) Comme $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$, par th. de stabilité affine, $(-Y) \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$.

   (b) Comme :
   - X et $-Y$ sont à densité,
   - X et $-Y$ sont indépendantes,
   - f_X est bornée (par exemple),

d'après le cours, la variable $X-Y$ est à densité et une de ses densités est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X-Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t).f_{-Y}(x-t)dt$$

De plus, $(X-Y)(\Omega) \subset [-2,2]$, donc pour tout $x \notin [-2,2]$, $f_{X-Y}(x) = 0$.
Soit $x \in [-2,2]$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$f_X(t).f_{-Y}(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow t \in [-1,1]$ et $x-t \in [-1,1] \Leftrightarrow Max(-1,x-1) \leq t \leq min(1,x+1)$

- <u>1er cas :</u> si $x \in [-2,0]$, alors $Max(-1,x-1) = -1$ et $min(1,x+1) = x+1$ donc

$$f_{X-Y}(x) = \int_{-1}^{x+1} (1-|t|).\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}.\int_{-1}^{x+1}(1-|t|)dt$$

  - <u>1er sous-cas :</u> si $x \in [-2,-1]$ alors $x+1 \leq 0$ donc

$$f_{X-Y}(x) = \frac{1}{2}.\int_{-1}^{x+1}(1+t)dt = ... = \frac{1}{4}(x^2+4x+4)$$

  - <u>2ème sous-cas :</u> si $x \in [-1,0]$ alors par la relation de Chasles,

$$f_{X-Y}(x) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(1-|t|)dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{x+1}(1-t)dt = ... = \frac{1}{4}(2-x^2)$$

- <u>1er cas :</u> si $x \in [0,2]$, alors $Max(-1,x-1) = x-1$ et $min(1,x+1) = 1$ donc

$$f_{X-Y}(x) = \int_{x-1}^{1} (1-|t|).\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}.\int_{x-1}^{1}(1-|t|)dt$$

  - <u>1er sous-cas :</u> si $x \in [1,2]$ alors $x-1 \geq 0$ donc

$$f_{X-Y}(x) = \frac{1}{2}.\int_{x-1}^{1}(1-t)dt = ... = \frac{1}{4}(x^2-4x+4)$$

  - <u>2ème sous-cas :</u> si $x \in [0,1]$, alors par la relation de Chasles,

$$f_{X-Y}(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{0}(1-|t|)dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{1}(1-x)dt = ... = \frac{1}{4}(2-x^2)$$

<u>Bilan :</u> $X-Y$ a pour densité la fonction

$$f_{X-Y} : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{4}(x^2+4x+4) \text{ si } x \in [-2,-1] \\ \frac{1}{4}(2-x^2) \text{ si } x \in]-1,0] \\ \frac{1}{4}(2-x^2) \text{ si } x \in]0,1] \\ \frac{1}{4}(x^2-4x+4) \text{ si } x \in]1,2] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Remarquons que cette densité est paire. Logique car X et $-Y$ sont deux variables de densités paires.