EDHEC 2021 voie S : corrigé

Exercice 1

1. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![0; n-1]\!]$ on a par croissance de la suite :

$$a_k \leqslant a_n$$

En sommant ces inégalités pour k allant de 0 à $n-1$ on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} a_n \qquad \text{autrement dit} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} a_k \leqslant n a_n$$

En divisant par n qui est strictement positif on obtient :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k \leqslant a_n$$

On a bien établi :

$$\boxed{b_n \leqslant a_n}$$

On étudie maintenant la monotonie de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. On s'intéresse au signe de $b_{n+1} - b_n$. On remarque que :

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k = \frac{1}{n+1} \times \left(a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k\right) = \frac{1}{n+1}a_n + \frac{n}{n+1} \times \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k}_{=b_n} = \frac{1}{n+1}a_n + \frac{n}{n+1}b_n$$

On a donc :

$$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1}a_n + \frac{n}{n+1}b_n - b_n = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geqslant 0} \times \underbrace{(a_n - b_n)}_{\geqslant 0} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{b_{n+1} - b_n \geqslant 0}$$

Bilan : $\boxed{\text{la suite } (b_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$

b) Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle converge vers le réel ℓ on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n \leqslant \ell$. Or, on vient de montrer que $b_n \leqslant a_n$. On a donc :

$$b_n \leqslant \ell$$

Ceci prouve que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est $\boxed{\text{majorée}}$ De plus, elle est $\boxed{\text{croissante}}$ (question 1.a). On en déduit qu'elle converge vers un réel que l'on note ℓ'. Enfin, en passant à la limite dans l'inégalité

$$b_n \leqslant \ell$$

on obtient bien :

$$\boxed{\ell' \leqslant \ell}$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$b_{2n} = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{2n-1} a_k = \frac{1}{2n} \times \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k + \sum_{k=n}^{2n-1} a_k\right) = \frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k + \frac{1}{2n}\sum_{k=n}^{2n-1} a_k$$

Or, d'une part :

$$\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{1}{2} \times \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k}_{b_n} = \frac{b_n}{2}$$

D'autre part, pour tout $k \in [\![n; 2n-1]\!]$ on a (par croissance de la suite) :

$$a_k \geqslant a_n$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=n}^{2n-1} a_k \geqslant \underbrace{\sum_{k=n}^{2n-1} a_n}_{na_n} \qquad \text{donc} \qquad \frac{1}{2n} \sum_{k=n}^{2n-1} a_k \geqslant \frac{a_n}{2}$$

On a bien établi l'inégalité souhaitée :

$$\boxed{b_{2n} \geqslant \frac{b_n}{2} + \frac{a_n}{2}}$$

d) En passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$\ell' \geqslant \frac{\ell'}{2} + \frac{\ell}{2} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\ell' \geqslant \ell}$$

De plus on a établi en question 1.b l'inégalité $\ell' \leqslant \ell$. On en déduit que : $\ell' = \ell$. Autrement dit :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} b_n = \lim_{n \to +\infty} a_n}$$

2. **a)** On raisonne par récurrence sur n.

Initialisation. Pour $n = 0$, le terme u_0 est bien défini et vaut 1. On a donc bien : $u_0 \geqslant 1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que u_n est bien défini et que : $u_n \geqslant 1$. Montrons que :

u_{n+1} est bien défini et que : $u_{n+1} \geqslant 1$

On a : $u_n^2 \geqslant 0$ et $u_n \geqslant 1$ donc : $u_n^2 + u_n \geqslant 1$. Le terme $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$ est donc $\boxed{\text{bien défini}}$ (la quantité sous la racine est positive) et par croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$:

$$u_{n+1} \geqslant \sqrt{1} \quad \text{autrement dit} \quad \boxed{u_{n+1} \geqslant 1}$$

Ceci achève la récurrence.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n \geqslant 0$ donc :

$$u_n^2 + u_n \geqslant u_n^2$$

Par croissance de la fonction racine on en déduit :

$$\underbrace{\sqrt{u_n^2 + u_n}}_{u_{n+1}} \geqslant \sqrt{u_n^2}$$

Enfin, $u_n \geqslant 0$ donc $\sqrt{u_n^2} = u_n$. On a donc établi l'inégalité :

$$\boxed{u_{n+1} \geqslant u_n}$$

Ceci prouve que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante}}$ On a donc deux possibilités :

1) soit cette suite converge
2) soit elle diverge vers $+\infty$.

On va écarter le cas 1) en raisonnant par l'absurde. Supposons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, vers un réel que l'on note c. D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n} \qquad \text{donc} \qquad u_{n+1}^2 = u_n^2 + u_n$$

En passant à la limite dans cette égalité on obtient :

$$c^2 = c^2 + c \qquad \text{donc} \qquad c = 0$$

D'autre part, $u_0 = 1$ et la suite est croissante. On a donc nécessairement : $c \geqslant 1$.

On obtient la contradiction suivante : $0 \geqslant 1$.

Ceci prouve que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas, et donc qu'elle $\boxed{\text{diverge vers } +\infty}$

c)

```
n=1
u=1
S=1
while S<=1000
    u=sqrt(u^2+u)
    S=S+u
    n=n+1
end
disp(n)
```

Remarque Comme $S_n \geqslant u_{n-1}$, S_n tend vers $+\infty$. Ceci garantit que la boucle while s'arrêtera.

3. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$u_{n+1}-u_n = \sqrt{u_n^2+u_n}-u_n = \frac{\left(\sqrt{u_n^2+u_n}-u_n\right)\times\left(\sqrt{u_n^2+u_n}+u_n\right)}{\sqrt{u_n^2+u_n}+u_n} = \frac{\sqrt{u_n^2+u_n}^2-u_n^2}{\sqrt{u_n^2+u_n}+u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2+u_n}+u_n}$$

En divisant numérateur et dénominateur par u_n (licite car $u_n > 0$) on obtient :

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{u_n}}+1}$$

Enfin : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{u_n} = 0$ donc par continuité de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}$ en $x=0$:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{u_n}}+1} \qquad \text{existe et vaut} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

On a bien montré que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1}-u_n) = \frac{1}{2}}$$

Remarque On pouvait aussi partir de l'écriture $u_{n+1}-u_n = u_n \times \left(\sqrt{1+\dfrac{1}{u_n}}-1\right)$ et appliquer l'équivalent usuel $\sqrt{1+x}-1 \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2}$ à $x = \dfrac{1}{u_n}$.

b) La fonction f est dérivable sur $[1;+\infty[$ et pour tout $x \in [1;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}-1 = \frac{2x+1-2\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{x^2+x}} = \frac{\left(2x+1-2\sqrt{x^2+x}\right)\times\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right)}{2\sqrt{x^2+x}\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right)}$$

Le dénominateur est positif et le numérateur vaut :

$$\left(2x+1-2\sqrt{x^2+x}\right)\times\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}\right) = (2x+1)^2-\left(2\sqrt{x^2+x}\right)^2 = 4x^2+4x+1-4(x^2+x) = 1 > 0$$

On a donc, pour tout $x \in [1;+\infty[$: $\boxed{f'(x) > 0}$ Ceci prouve que

la fonction f est $\boxed{\text{strictement croissante}}$ sur $[1;+\infty[$

On va maintenant montrer que la suite $(u_{n+1}-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$. Il s'agit de montrer que :

$$u_{n+1}-u_n \leqslant u_{n+2}-u_{n+1}$$

On a :

$$u_{n+1}-u_n = \sqrt{u_n^2+u_n}-u_n = f(u_n)$$

et de même :

$$u_{n+2}-u_{n+1} = f(u_{n+1})$$

Or, on sait que : $u_n \leqslant u_{n+1}$ (question 2.b). Par croissance de la fonction f on en déduit :

$$f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \qquad \text{donc} \qquad u_{n+1} - u_n \leqslant u_{n+2} - u_{n+1}$$

Bilan : $\boxed{\text{la suite } (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$

c) On applique le raisonnement de la question 1 avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ceci est licite car la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien croissante (3.b) et convergente (3.a). On sait d'après 1.d que

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n$$

où la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par :

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \frac{1}{n} \times (u_n - u_0) = \frac{u_n}{n} - \frac{1}{n}$$

On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} - \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) \overset{3.a}{=} \frac{1}{2}$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{n}{2}} - \underbrace{\frac{2}{n}}_{\text{tend vers } 0} = 1 \qquad \text{donc} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{\frac{n}{2}} = 1$$

Ceci prouve bien que : $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{2}}$

4. a) On commence par calculer les premiers termes des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

n	0	1	2	3
u_n	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2+\sqrt{2}}$	$\sqrt{2+\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$
S_n		1	$1+\sqrt{2}$	$1+\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{2}}$

Sur les premiers termes la formule $\boxed{S_n = u_n^2 - 1}$ est vérifiée. Essayons d'établir cette formule par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation. Pour $n = 1$ on a bien :

$$\underbrace{S_1}_{1} = \underbrace{u_1^2 - 1}_{2-1}$$

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que : $S_n = u_n^2 - 1$. Montrons que : $S_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1$. On a :

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n = S_n + u_n$$

Par hypothèse de récurrence : $S_n = u_n^2 - 1$. Donc :

$$S_{n+1} = u_n^2 - 1 + u_n$$

D'autre part :

$$u_{n+1}^2 - 1 = \sqrt{u_n^2 + u_n}^{\,2} - 1 = u_n^2 + u_n - 1$$

On a donc bien : $\boxed{S_{n+1} = u_{n+1}^2 - 1}$

Ceci achève la récurrence. On cherche maintenant un équivalent de S_n en $+\infty$. On a :

$$\frac{S_n}{\frac{n^2}{4}} = \frac{u_n^2}{\frac{n^2}{4}} - \frac{1}{\frac{n^2}{4}} = \underbrace{\left(\frac{u_n}{\frac{n}{2}}\right)^2}_{\text{tend vers } 1} - \underbrace{\frac{4}{n^2}}_{\text{tend vers } 0} \qquad \text{donc} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{\frac{n^2}{4}} = 1$$

Bilan : $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{4}}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a donc les équivalences suivantes :

$$S_n \leqslant 1000 \iff u_n^2 - 1 \leqslant 1000 \iff u_n^2 \leqslant 1001 \iff u_n \leqslant \sqrt{1001}$$

(on a utilisé la stricte croissance de la fonction racine carrée). D'où le programme suivant :

```
n=0
u=1
while u<=sqrt(1001)
    u=sqrt(u^2+u)
    n=n+1
end
disp(n)
```

Exercice 2

1. a) La variable aléatoire $Y = e^Z$ est à valeurs dans $]0; +\infty[$ donc pour tout $x \leqslant 0$:

$$F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = 0$$

Pour tout $x > 0$ on a :

$$F_Y(x) = P(Y \leqslant x) = P(e^Z \leqslant x) = P(Z \leqslant \ln x) = \Phi(\ln x)$$

On a utilisé la stricte croissance de la fonction ln sur $]0; +\infty[$. Bilan :

$$\boxed{F_Y(x) = \begin{cases} \Phi(\ln x) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}}$$

2. La fonction F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty; 0[$ (fonction constante) et sur $]0; +\infty[$ (par composition de ln et de Φ). On obtient une densité f_Y de Y en dérivant F_Y en tout point $x \neq 0$:

$$f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \times \Phi'(\ln x) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

et on pose par exemple $f_Y(0) = 0$. Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\Phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

On obtient bien :

$$\boxed{f_Y(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right) & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}}$$

3. a) Les variables aléatoires X_n sont finies donc leur espérance et leur variance existent. On a :

$$E(X_n) = 1 \times P(X_n = 1) + (-1) \times P(X_n = -1) = p - (1-p) = \boxed{2p - 1}$$

X_n^2 est une variable certaine de valeur 1 donc $E(X_n^2) = 1$ et finalement :

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = 1 - (2p-1)^2 = 1 - (4p^2 - 4p + 1) = 4p - 4p^2 = \boxed{4p(1-p)}$$

b) T_n est un produit de termes valant chacun soit 1, soit -1. Donc $\boxed{T_n(\Omega) = \{-1, 1\}}$ Autrement dit :

$$\boxed{T_n \text{ suit une loi de Rademacher}}$$

On calcule $E(T_n)$. Par mutuelle indépendance des variables aléatoires $X_1, \ldots X_n$ on a :

$$E(T_n) = \prod_{k=1}^{n} E(X_k) = \prod_{k=1}^{n} (2p-1) = \boxed{(2p-1)^n}$$

Or, on sait d'après la question précédente que :

$$E(T_n) = 2P(T_n = 1) - 1$$

On a donc : $P(T_n = 1) = \dfrac{1 + (2p-1)^n}{2}$.

c) On vient de voir que

$$T_n \text{ suit la loi de } \boxed{\text{Rademacher de paramètre } \frac{1+(2p-1)^n}{2}}$$

d) On a :

$$0 < p < 1 \qquad \text{donc} \qquad 0 < 2p < 2 \qquad \text{donc} \qquad -1 < 2p - 1 < 1$$

On en déduit que :

$$\lim_{n \to +\infty} (2p-1)^n = 0$$

et donc :

$$\lim_{n \to +\infty} P(T_n = 1) = \frac{1}{2}$$

On a donc :

$$\lim_{n \to +\infty} P(T_n = -1) = \lim_{n \to +\infty} 1 - P(T_n = 1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Bilan :

$(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $\boxed{\text{converge en loi vers une variable aléatoire } T \text{ vérifiant : } P(T=1) = P(T=-1) = \frac{1}{2}}$ (on reconnaît loi de Rademacher de paramètre $\frac{1}{2}$).

4. a) Soit $\omega \in \Omega$ tel que : $|T_{n+1}(\omega) - T'(\omega)| < \dfrac{1}{2}$ et $|T_n(\omega) - T'(\omega)| < \dfrac{1}{2}$. Il s'agit de montrer que : $|T_{n+1}(\omega) - T_n(\omega)| < 1$. Par inégalité triangulaire, on a :

$$|T_{n+1}(\omega) - T_n(\omega)| = |T_{n+1}(\omega) - T'(\omega) + T'(\omega) - T_n(\omega)| \leqslant \underbrace{|T_{n+1}(\omega) - T'(\omega)|}_{<1/2} + \underbrace{|T'(\omega) - T_n(\omega)|}_{<1/2}$$

On a donc bien :

$$|T_{n+1}(\omega) - T_n(\omega)| < 1$$

Ceci établit l'inclusion :

$$\boxed{\left[|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2}\right] \cap \left[|T_n - T'| < \frac{1}{2}\right] \subset [\ |T_{n+1} - T_n| < 1\ ]}$$

b) On passe au complémentaire dans l'inclusion précédente. On obtient :

$$\overline{[\ |T_{n+1} - T_n| < 1\ ]} \subset \overline{\left[|T_{n+1} - T'| < \frac{1}{2}\right] \cap \left[|T_n - T'| < \frac{1}{2}\right]}$$

Autrement dit, avec la règle $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$:

$$[\ |T_{n+1} - T_n| \geqslant 1\ ] \subset \left[|T_{n+1} - T'| \geqslant \frac{1}{2}\right] \cup \left[|T_n - T'| \geqslant \frac{1}{2}\right]$$

On a donc :

$$P\left(|T_{n+1} - T_n| \geqslant 1\right) \leqslant P\left(\left[|T_{n+1} - T'| \geqslant \frac{1}{2}\right] \cup \left[|T_n - T'| \geqslant \frac{1}{2}\right]\right)$$

Enfin, on sait que pour tous événements A et B : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et donc : $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$. On obtient bien :

$$\boxed{P\left(|T_{n+1} - T_n| \geqslant 1\right) \leqslant P\left(|T_{n+1} - T'| \geqslant \frac{1}{2}\right) + P\left(|T_n - T'| \geqslant \frac{1}{2}\right)}$$

c) On remarque que :

$$T_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1} X_k = T_n \times X_{n+1}$$

donc :

$$T_{n+1} - T_n = T_n \times (X_{n+1} - 1)$$

et donc :

$$|T_{n+1} - T_n| = |T_n| \times |X_{n+1} - 1| = |X_{n+1} - 1| \quad \text{car } |T_n| \text{ est une variable certaine de valeur } 1$$

On a donc :

$$P(|T_{n+1} - T_n| \geqslant 1) = P\left(|X_{n+1} - 1| \geqslant 1\right) = P(X_{n+1} = -1) \quad \text{car } X_{n+1} \text{ vaut soit } 1, \text{ soit } -1$$

On a donc bien :

$$\boxed{P\left(|T_{n+1} - T_n| \geqslant 1\right) = 1 - p}$$

d) On va montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas en probabilité. On raisonne par l'absurde en supposant que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable aléatoire T'. On a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(|T_{n+1} - T'| \geqslant \frac{1}{2}\right) = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} P\left(|T_n - T'| \geqslant \frac{1}{2}\right) = 0$$

Or, d'après les questions 3.b et 3.c on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 - p \leqslant P\left(|T_{n+1} - T'| \geqslant \frac{1}{2}\right) + \lim_{n\to+\infty} P\left(|T_n - T'| \geqslant \frac{1}{2}\right)$$

En passant à la limite dans cette inégalité on obtient donc :

$$1 - p \leqslant 0 \qquad \text{donc} \qquad p \geqslant 1$$

C'est absurde car d'après l'énoncé, $p < 1$. Bilan :

La suite $\boxed{(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ ne converge pas en probabilité}}$

5. a) Par définition :

$$\overline{X_n}^* = \frac{\overline{X_n} - E\left(\overline{X_n}\right)}{\sqrt{V(\overline{X_n})}}$$

On va calculer $E\left(\overline{X_n}\right)$ et $V(\overline{X_n})$. D'après les formules de la question 2.a avec $p = \dfrac{1}{2}$ on a pour tout $k \in [\![1; n]\!]$: $E(X_k) = 0$ et $V(X_k) = 1$. Par linéarité de l'espérance on a :

$$E(\overline{X_n}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{E(X_k)}_{0} = 0$$

Par la formule $V(aX) = a^2 V(X)$ puis par mutuelle indépendance des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ on obtient :

$$V(\overline{X_n}) = \frac{1}{n^2} V(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n^2} \times \sum_{k=1}^{n} \underbrace{V(X_k)}_{1} = \frac{1}{n}$$

Bilan :

$$\boxed{\overline{X_n}^* = \sqrt{n} \times \overline{X_n}}$$

b) Les variables aléatoires X_n sont mutuellement indépendantes et de même loi, et admettent une espérance et une variance. D'après le théorème central limite, $\overline{X_n}^*$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Autrement dit (en supposant que la variable aléatoire Z de la question 1 est définie sur le même espace probabilisé que les X_n) :

$$\sqrt{n} \times \overline{X_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$$

En composant par la fonction exponentielle, qui est continue sur $\mathbb{R}$:

$$e^{\sqrt{n}\times\overline{X_n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \underbrace{e^Z}_{Y}$$

Enfin, on remarque que $U_n^{1/\sqrt{n}} = e^{\sqrt{n}\times\overline{X_n}}$. On a donc bien :

$$\boxed{U_n^{1/\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} Y}$$

Exercice 3

1. Pour tout $x \in E$ on a, par antisymétrie de f :

$$\langle f(x), x\rangle = -\langle x, f(x)\rangle$$

Or, par symétrie du produit scalaire : $\langle x, f(x)\rangle = \langle f(x), x\rangle$. On a donc :

$$\langle f(x), x\rangle = -\langle f(x), x\rangle \qquad \text{donc} \quad 2\langle f(x), x\rangle = 0 \qquad \text{donc} \quad \boxed{\langle f(x), x\rangle = 0}$$

2. Par théorème du rang on sait déjà que :

$$\boxed{\dim \operatorname{Ker}(f) + \dim \operatorname{Im}(f) = \dim E} \quad (1)$$

On va montrer que : $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\}$. Soit $x \in \operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f)$. Il s'agit de montrer que : $x = 0_E$. $x \in \operatorname{Im}(f)$ donc par définition, il existe un vecteur $y \in E$ tel que : $x = f(y)$. On a alors :

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \langle x, f(y)\rangle \overset{f \text{ antisym.}}{=} -\langle f(x), y\rangle \overset{x\in\operatorname{Ker}(f)}{=} -\langle 0_E, y\rangle = 0$$

(par linéarité à gauche du produit scalaire). On a donc : $\|x\| = 0$ et donc : $x = 0_E$. Ceci prouve que :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f) = \{0_E\}} \quad (2)$$

Les affirmations (1) et (2) suffisent à prouver que $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont supplémentaires dans E. Bilan :

$$\boxed{\operatorname{Ker}(f) \oplus \operatorname{Im}(f) = E}$$

3. Déjà, s est bien un endomorphisme de E en tant que composée de deux endomorphismes de E. Montrons qu'il est symétrique. Soient x et y des vecteurs de E. Il s'agit de prouver que : $\langle s(x), y\rangle = \langle x, s(y)\rangle$. On a :

$$\langle s(x), y\rangle = \langle f(f(x)), y\rangle \overset{f \text{ antisym.}}{=} -\langle f(x), f(y)\rangle \overset{f \text{ antisym.}}{=} -(-\langle x, f(f(y))\rangle) = \langle x, s(y)\rangle$$

Bilan :

$$\boxed{s \text{ est un endomorphisme symétrique de } E}$$

Montrons maintenant que ses valeurs propres sont dans $\mathbb{R}_-$. Soit λ une valeur propre de s et x un vecteur propre associé (donc x n'est pas le vecteur nul). On a d'une part :

$$\langle s(x), x\rangle = \langle \lambda x, x\rangle = \lambda\langle x, x\rangle = \lambda\|x\|^2$$

et d'autre part :

$$\langle s(x), x\rangle = \langle f(f(x)), x\rangle \overset{f \text{ antisym.}}{=} = -\langle f(x), f(x)\rangle = -\|f(x)\|^2$$

Comme $x \neq 0_E$ on a : $\|x\|^2 \neq 0$. On en déduit que :

$$\lambda\|x\|^2 = -\|f(x)\|^2 \qquad \text{donc} \qquad \lambda = \underbrace{\frac{-1}{\|x\|^2}}_{<0} \times \underbrace{\|f(x)\|^2}_{\geqslant 0} \qquad \text{donc} \quad \boxed{\lambda \leqslant 0}$$

Bilan : $\boxed{\text{les valeurs propres de } s \text{ sont toutes dans } \mathbb{R}_-}$

4. **a)** g est la restriction de f à l'espace vectoriel $\mathrm{Im}(f)$, donc c'est une application linéaire. De plus, pour tout $x \in \mathrm{Im}(f)$: $g(x) = f(x)$ donc par définition : $g(x) \in \mathrm{Im}(f)$. Ceci prouve que g est un $\boxed{\text{endomorphisme de } \mathrm{Im}(f)}$ Enfin, pour tous vecteurs x et y de $\mathrm{Im}(f)$ on a :

$$\langle g(x), y\rangle = \langle f(x), y\rangle = -\langle x, f(y)\rangle = -\langle x, g(y)\rangle$$

Bilan :

$$\boxed{g \text{ est un endomorphisme antisymétrique de } \mathrm{Im}(f)}$$

b) Soit λ une valeur propre de t et $x \in \mathrm{Im}(f)$ un vecteur propre associé. Avec le même raisonnement qu'à la question 3 on obtient :

$$\lambda = \frac{-1}{\|x\|^2} \times \|g(x)\|^2 = \frac{-1}{\|x\|^2} \times \|f(x)\|^2$$

De plus, on sait que $x \in \mathrm{Im}(f)\backslash\{0_E\}$. Or : $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$. On a donc : $x \notin \mathrm{Ker}(f)$ de sorte que $f(x) \neq 0_E$. On en déduit :

$$\lambda = \underbrace{\frac{-1}{\|x\|^2}}_{<0} \times \underbrace{\|f(x)\|^2}_{>0} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\lambda < 0}$$

Bilan : $\boxed{\text{les valeurs propres de } s \text{ sont toutes dans } \mathbb{R}_-^*}$

5. D'après l'énoncé $e_1 \neq 0_E$ et $t(e_1) = \lambda e_1$.

a) Il s'agit de montrer que :

1) e_1 et $g(e_1)$ sont dans $E_\lambda(t)$
2) $\langle e_1, g(e_1)\rangle = 0$
3) la famille $\big(e_1, g(e_1)\big)$ est libre.

Allons-y pour 1). Par définition, $e_1 \in E_\lambda(t)$. De plus :

$$t(g(e_1)) = g \circ g\,(g(e_1)) = g(g\,(g(e_1)))\,) = g(t(e_1)) = g(\lambda e_1) = \lambda g(e_1)$$

On a donc bien : $g(e_1) \in E_\lambda(t)$. Montrons maintenant 2). On a :

$$\langle e_1, g(e_1)\rangle = \langle e_1, f(e_1)\rangle \overset{\text{par 1.}}{=} 0$$

La famille $(e_1, g(e_1))$ est donc orthogonale. Pour montrer que 3) elle est libre, il suffit de prouver qu'elle ne contient pas le vecteur nul. D'après l'énoncé e_1 n'est pas le vecteur nul (c'est un vecteur propre). De plus $e_1 \in \mathrm{Im}(f)\backslash\{0_E\}$ et $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$. On a donc : $g(e_1) = f(e_1) \neq 0_E$. Bilan :

$$\boxed{\big(e_1, g(e_1)\big) \text{ est une famille orthogonale et libre de } E_\lambda(t)}$$

b) On va maintenant construire une base orthogonale de $E_\lambda(t)$ et montrer que cet espace vectoriel est de dimension paire. On a vu que $\big(e_1, g(e_1)\big)$ est une famille orthogonale libre de $E_\lambda(t)$. On distingue alors deux cas :

Cas 1 : si Vect$\big(e_1, g(e_1)\big) = E_\lambda(t)$. Dans ce cas, $\big(e_1, g(e_1)\big)$ est une base orthogonale de $E_\lambda(t)$.

Cas 2 : sinon. On note F_2 le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Vect}\big(e_1, g(e_1)\big)$ dans $E_\lambda(t)$. F_2 n'est pas réduit à $\{0_E\}$ donc il existe un vecteur non-nul $e_2 \in F_2$. Montrons alors que

$$\big(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2)\big) \text{ est une famille orthogonale libre de } E_\lambda(t)$$

On peut appliquer mutatis mutandis le raisonnement de la question 5.a, à l'exception de l'orthogonalité qui mérite un examen minutieux. On a déjà montré que : $\langle e_1, g(e_1)\rangle = 0$. De manière analogue : $\langle e_2, g(e_2)\rangle = 0$. Comme e_2 est dans l'orthogonal de $\mathrm{Vect}\big(e_1, g(e_1)\big)$ on obtient aussi :

$$\langle e_2, e_1\rangle = 0 \qquad \text{et} \qquad \langle e_2, g(e_1)\rangle = 0$$

Il reste à prouver que $\langle g(e_2), e_1\rangle = 0$ et $\langle g(e_2), g(e_1)\rangle = 0$. Comme g est antisymétrique (4.a) on a :

$$\langle g(e_2), e_1\rangle = -\underbrace{\langle e_2, g(e_1)\rangle}_{0} = 0$$

Enfin :

$$\langle g(e_2), g(e_1)\rangle = -\langle e_2, g(g(e_1))\rangle = -\langle e_2, t(e_1)\rangle = -\langle e_2, \lambda e_1\rangle = -\lambda \underbrace{\langle e_2, e_1\rangle}_{0} = 0$$

Bilan :

$$\boxed{\Big(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2)\Big) \text{ est une famille orthogonale de } E_\lambda(t)}$$

De plus elle est libre car les vecteurs sont non-nuls (comme en 5.a). On distingue alors deux sous-cas :

Cas 2.1 : si Vect$\Big(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2)\Big) = E_\lambda(t)$. Dans ce cas, $\Big(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2)\Big)$ est une base orthogonale de $E_\lambda(t)$.

Cas 2.2 : sinon. On note F_3 le supplémentaire orthogonal de $\mathrm{Vect}\Big(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2)\Big)$ dans $E_\lambda(t)$. F_3 contient un vecteur non-nul e_3. De même que précédemment, on montre que

$$\Big(e_1, g(e_1), e_2, g(e_2), e_3, g(e_3)\Big) \text{ est une famille orthogonale de } E_\lambda(t)$$

et ainsi de suite ...

A chaque étape, on ajoute deux vecteurs à la famille libre. Ce processus s'arrête nécessairement puisqu'une famille libre contient au plus $\dim E_\lambda(t)$ vecteurs. En notant p le rang de la dernière étape, on a ainsi construit une $\boxed{\text{base orthogonale } \Big(e_1, g(e_1), \dots, e_p, g(e_p)\Big) \text{ de } E_{\lambda(t)}}$ On a alors :

$$\dim E_\lambda(t) = \mathrm{Card}\Big(e_1, g(e_1), \dots, e_p, g(e_p)\Big) = 2p$$

et donc $E_\lambda(t)$ est bien de $\boxed{\text{dimension paire}}$

6. a) On a déjà établi cette égalité à la question 4.b. On a donc : $\boxed{\|g(e_k)\| = \sqrt{-\lambda} \times \|e_k\|}$

b) On a :

$$g(e'_k) = g\left(\frac{1}{\|e_k\|}e_k\right) = \frac{1}{\|e_k\|}g(e_k) = \frac{\sqrt{-\lambda}}{\|g(e_k)\|}g(e_k) = \sqrt{-\lambda}e''_k$$

De plus :

$$g(e''_k) = \frac{1}{\|g(e_k)\|}g(g(e_k)) = \frac{1}{\|g(e_k)\|}t(e_k) = \frac{1}{\|g(e_k)\|}\lambda e_k = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}\,\|e_k\|}\lambda e_k = \frac{-\sqrt{-\lambda}}{\|e_k\|}e_k = -\sqrt{-\lambda}e'_k$$

Bilan :

$$\boxed{g(e'_k) = \sqrt{-\lambda}e''_k} \qquad \text{et} \qquad \boxed{g(e''_k) = -\sqrt{-\lambda}e'_k}$$

7. Comme t est un endomorphisme symétrique de $\mathrm{Im}(f)$, il est diagonalisable. On a donc :

$$\dim \mathrm{Im}(f) = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(t)} \dim E_\lambda(t)$$

D'après la question 5.b, les $E_\lambda(t)$ sont tous de dimension paire. Enfin, par définition $\mathrm{rg}(f) = \dim \mathrm{Im}(f)$. Bilan :

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) \text{ est pair}} \text{ en tant que somme de nombres pairs}$$

8. Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(t)$. En reprenant les notations des questions 5.b et 6.b, la famille $(e'_1, e''_1, \dots, e'_p, e''_p)$ est une base orthonormale de $E_\lambda(t)$ (on a normalisé la base orthogonale de la question 5.b). De plus, les sous-espaces propres $E_\lambda(t)$ sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathrm{Im}(f)$, car t est un endomorphisme symétrique de $\mathrm{Im}(f)$. En concaténant les bases orthonormales de ces sous-espaces propres, on obtient alors une

$\boxed{\text{base orthonormale de } \mathrm{Im}(f)}$ (donc de cardinal $2r$) de la forme $\boxed{(u_1', u_1'', u_2', u_2'', \dots, u_r', u_r'')}$

De plus, pour tout $i \in [\![1; r]\!]$, en notant λ_i la valeur propre de t telle que $u_i' \in E_{\lambda_i}(t)$ et $\boxed{a_i = \sqrt{-\lambda_i}}$ on a d'après 6.b :

$$f(u_i') = a_i u_i'' \qquad \text{et} \qquad f(u_i'') = -a_i u_i' \qquad (*)$$

Enfin, $\boxed{a_i > 0}$ car $\lambda_i < 0$ (question 4.b). On distingue alors deux cas :

Cas 1 : si Ker$(f) = \{0_E\}$ Dans ce cas $\mathrm{Im}(f) = E$ donc

$$(u_1', u_1'', u_2', u_2'', \dots, u_r', u_r'') \text{ est une } \boxed{\text{base orthonormale de } E}$$

D'après la relation $(*)$, la matrice M de f dans cette base s'écrit :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & -a_2 & & & \\ & & a_2 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & -a_r \\ & & & & & a_r & 0 \end{pmatrix}}$$

Cas 2 : si Ker$(f) \neq \{0_E\}$ Dans ce cas on note $\boxed{(v_1, \dots, v_q) \text{ une base orthonormale de } \mathrm{Ker}(f)}$ Comme

$$E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$$

on sait que (concaténation des bases)

$$\boxed{\mathcal{B} = (u_1', u_1'', \dots, u_r', u_r'', v_1, \dots, v_q)} \text{ est une base de } E$$

Pour tout $i \in [\![1; q]\!]$ on a : $f(v_i) = 0_E$. Donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & & & & & & \\ a_1 & 0 & & & & & & & \\ & & 0 & -a_2 & & & & & \\ & & a_2 & 0 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 0 & -a_r & & \\ & & & & & a_r & 0 & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}}$$

Il reste à prouver que la base $\mathcal{B}$ est orthonormale. Comme on a concaténé une base orthonormale de $\mathrm{Im}(f)$ et une base orthonormale de $\mathrm{Ker}(f)$, il suffit de prouver que les espaces vectoriels $\mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f)$ sont orthogonaux. Soit $x \in \mathrm{Im}(f)$ et $y \in \mathrm{Ker}(f)$. Il s'agit de prouver que : $\langle x, y \rangle = 0$. Il existe $z \in E$ tel que : $x = f(y)$. On a alors :

$$\langle x, y \rangle = \langle f(z), y \rangle = -\langle z, f(y) \rangle \overset{y \in \mathrm{Ker}(f)}{=} -\underbrace{\langle z, 0_E \rangle}_{0} = 0$$

Bilan :

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est bien une base orthonormale de } E}$$

Problème

1. On calcule :

$$I(p,0) = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \boxed{\frac{1}{p+1}} \qquad \text{et} \qquad I(0,q) = \left[-\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \boxed{\frac{1}{q+1}}$$

2. Soit $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. On fait une intégration par parties avec $u(x) = \dfrac{x^{p+1}}{p+1}$ et $v(x) = (1-x)^q$. Ceci est licite car les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$. On a $u'(x) = x^p$ et comme $q \geqslant 1$: $v'(x) = -q(1-x)^{q-1}$
On obtient :

$$I(p,q) = \int_0^1 x^p \times (1-x)^q \, \mathrm{d}x = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} \times (1-x)^q\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{x^{p+1}}{p+1} \times \left(-q(1-x)^{q-1}\right) \, \mathrm{d}x$$

$$= 0 - 0 + \frac{q}{p+1} \int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1} \, \mathrm{d}x$$

On obtient bien :

$$\boxed{I(p,q) = \frac{q}{p+1} I(p+1, q-1)}$$

3. Initialisation. Pour $q = 0$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a bien :

$$I(p,0) = \underbrace{\frac{p!0!}{(p+0)!}}_{=1} \times I(p+0, 0)$$

Hérédité. Soit $q \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $p \in \mathbb{N}$: $I(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q, 0)$. Montrons que pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$I(p, q+1) = \frac{p!(q+1)!}{(p+q+1)!} I(p+q+1, 0)$$

Soit $p \in \mathbb{N}$. On applique la relation de la question 2 au couple $(p, q+1)$ qui est bien dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. On obtient :

$$I(p, q+1) = \frac{q+1}{p+1} I(p+1, q)$$

Par hypothèse de récurrence on a :

$$I(p+1, q) = \frac{(p+1)!q!}{(p+1+q)!} I(p+1+q, 0)$$

Enfin, $\dfrac{(p+1)!}{p+1} = p!$ et $(q+1)q! = (q+1)!$. On obtient donc :

$$I(p, q+1) = \frac{q+1}{p+1} \times \frac{(p+1)!q!}{(p+1+q)!} I(p+1+q, 0) = \frac{p!(q+1)!}{(p+q+1)!} I(p+q+1, 0)$$

Ceci achève la récurrence.

4. En utilisant les questions 3 et 1 on obtient pour tout $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$I(p,q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} \times I(p+q, 0) \overset{\text{par } 1}{=} \frac{p!q!}{(p+q)!} \times \frac{1}{p+q+1} = \boxed{\frac{p!q!}{(p+q+1)!}}$$

En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{I(n,n) = \dfrac{(n!)^2}{(2n+1)!}}$

5.
- La fonction b_n est continue sur $]-\infty; 0[$ et sur $]1; +\infty[$ (fonction nulle) et aussi sur $]0;1[$ (polynôme). Donc b_n est $\boxed{\text{continue sur } \mathbb{R} \backslash \{0, 1\}}$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in [0;1]$, on a : $x \geqslant 0$ et $(1-x) \geqslant 0$ donc :

$$b_n(x) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^n (1-x)^n \geqslant 0$$

Sinon, $b_n(x) = 0$. Dans tous les cas on a : $\boxed{b_n(x) \geqslant 0}$

- Enfin, sous réserve de convergence :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x)\, \mathrm{d}x \overset{\text{Chasles}}{=} \int_{-\infty}^{0} \underbrace{b_n(x)}_{0}\, \mathrm{d}x + \int_0^1 b_n(x)\, \mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \underbrace{b_n(x)}_{0}\, \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^n (1-x)^n\, \mathrm{d}x$$

Cette intégrale converge (intégrale d'une fonction continue sur un segment) et par linéarité de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} b_n(x)\, \mathrm{d}x = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \underbrace{\int_0^1 x^n (1-x)^n\, \mathrm{d}x}_{\text{on reconnaît } I(n,n)} = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \boxed{= 1}$$

Bilan : $\boxed{b_n \text{ est une densité de probabilité}}$

Remarque Pour $n \geqslant 1$ on pourrait montrer la continuité de b_n en 0 et en 1 mais ça n'a pas d'importance ici.

6. X_0 admet la densité f_0 définie par :

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Bilan : X_0 suit la $\boxed{\text{loi uniforme sur } [0;1]}$

7. a) Sous réserve de convergence (absolue, mais X_n est à valeurs positives) :

$$E(X_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x b_n(x)\, \mathrm{d}x \overset{\text{Chasles}}{=} \int_0^1 \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^{n+1} (1-x)^n\, \mathrm{d}x$$

Cette intégrale converge (intégrale d'une fonction continue sur un segment) donc X_n admet une espérance. Par linéarité :

$$E(X_n) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \underbrace{\int_0^1 x^{n+1} (1-x)^n\, \mathrm{d}x}_{\text{on reconnaît } I(n+1,n)} = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n+1)!n!}{(2n+2)!} = \frac{n+1}{2n+2} = \frac{1}{2}$$

On a bien : $\boxed{E(X_n) = \frac{1}{2}}$

b) On commence par calculer $E(X_n^2)$ avec le théorème de transfert (sous réserve de convergence) :

$$E(X_n^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 b_n(x)\, \mathrm{d}x$$

De même que pour $E(X_n)$, on montre que $E(X_n^2)$ existe et que :

$$E(X_n^2) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} I(n+2,n) = \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \times \frac{(n+2)!n!}{(2n+3)!} = \frac{(n+2)(n+1)}{(2n+3)(2n+2)} = \frac{n+2}{2(2n+3)}$$

X_n admet donc une variance et par formule de Koenig-Huygens :

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = \frac{n+2}{2(2n+3)} - \frac{1}{4} = \frac{2(n+2)-(2n+3)}{4(2n+3)} = \boxed{\frac{1}{4(2n+3)}}$$

c) Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant P\left(|X_n - E(X_n)| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2}$$

autrement dit :

$$0 \leqslant P\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \underbrace{\frac{1}{4\varepsilon^2(2n+3)}}_{\text{tend vers 0 quand } n\to+\infty}$$

Par encadrement on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \geqslant \varepsilon\right) \qquad \text{existe et vaut} \qquad 0$$

Bilan :

La suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ $\boxed{\text{converge en probabilité vers la variable certaine de valeur } \frac{1}{2}}$

8. $\boxed{F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}}$

9. a) V_{2n+1} désigne le temps d'arrivée de la dernière personne. Autrement dit : $\boxed{V_{2n+1} = \max(U_1, \ldots, U_{2n+1})}$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$G_{2n+1}(x) = P(V_{2n+1} \leqslant x) = P\Big(\max(U_1, \ldots, U_{2n+1}) \leqslant x\Big) = P(U_1 \leqslant x, U_2 \leqslant x, \ldots, U_{2n+1} \leqslant x)$$

où , désigne une intersection. Par mutuelle indépendance des variables aléatoires U_1, ..., U_{2n+1} on a donc :

$$G_{2n+1}(x) = \underbrace{P(U_1 \leqslant x)}_{=F_U(x)} \times \underbrace{P(U_2 \leqslant x)}_{=F_U(x)} \times \cdots \times \underbrace{P(U_{2n+1} \leqslant x)}_{=F_U(x)} = \Big(F_U(x)\Big)^{2n+1}$$

Bilan :

$$\boxed{G_{2n+1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ x^{2n+1} & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}}$$

10. a) V_1 désigne le temps d'arrivée de la première personne. Autrement dit : $\boxed{V_1 = \min(U_1, \ldots, U_{2n+1})}$

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$P(V_1 > x) = P\Big(\min(U_1, \ldots, U_{2n+1}) > x\Big) = P(U_1 > x, U_2 > x, \ldots, U_{2n+1} > x)$$

Par mutuelle indépendance des variables aléatoires U_1, ..., U_{2n+1} on a donc :

$$P(V_1 > x) = \underbrace{P(U_1 > x)}_{=1-F_U(x)} \times \underbrace{P(U_2 > x)}_{=1-F_U(x)} \times \cdots \times \underbrace{P(U_{2n+1} > x)}_{=1-F_U(x)} = \Big(1 - F_U(x)\Big)^{2n+1}$$

On a donc :

$$G_1(x) = P(V_1 \leqslant x) = 1 - P(V_1 > x) = 1 - \Big(1 - F_U(x)\Big)^{2n+1}$$

Bilan :

$$\boxed{G_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - (1-x)^{2n+1} & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}}$$

11.

```
n = input('Entrez la valeur de n : ')
U = grand(1,2*n+1,'unf',0,1) // alternative : U = rand(1,2*n+1)
Vpremier = min(U)  // V1
Vdernier = max(U)  //V2n+1
```

12. **a)** Pour tout $x \in [0;1]$ on a :

$$G_{n+1}(x) = P(V_{n+1} \leqslant x)$$

L'événement $[V_{n+1} \leqslant x]$ est réalisé si et seulement si, au moins $n+1$ personnes sont arrivées avant le temps x. Pour tout $k \in [\![n+1;2n+1]\!]$ on note R_k l'événement :

$$R_k \text{ : exactement } k \text{ personnes sont arrivées avant le temps } x$$

On a donc :

$$[V_{n+1} \leqslant x] = R_{n+1} \sqcup R_{n+2} \sqcup \cdots \sqcup R_{2n+1}$$

où $\sqcup$ désigne une union disjointe. On a donc :

$$G_{n+1}(x) = P\left(R_{n+1} \sqcup R_{n+2} \sqcup \cdots \sqcup R_{2n+1}\right) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} P(R_k) \quad (1)$$

Soit $k \in [\![n+1;2n+1]\!]$. On va montrer que :

$$P(R_k) = \binom{2n+1}{k} x^k (1-x)^{2n+1-k}$$

On note $\mathcal{E}_k$ l'ensemble des sous-ensembles de $[\![1;2n+1]\!]$ ayant exactement k éléments. On a donc :

$$R_k = \bigsqcup_{J \in \mathcal{E}_k} \left(\left(\bigcap_{i \in J} [U_i \leqslant x] \right) \cap \left(\bigcap_{i \in [\![1;2n+1]\!] \setminus J} [U_i > x] \right) \right)$$

On a donc, par mutuelle indépendance des variables aléatoires $U_1, \ldots, U_{2n+1}$:

$$P(R_k) = \sum_{J \in \mathcal{E}_k} \underbrace{\prod_{i \in J} P(U_i \leqslant x)}_{x^k} \times \underbrace{\prod_{i \in [\![1;2n+1]\!] \setminus J} P(U_i > x)}_{(1-x)^{2n+1-k}} = \sum_{J \in \mathcal{E}_k} x^k (1-x)^{2n+1-k}$$

Enfin, l'ensemble $\mathcal{E}_k$ est de cardinal $\binom{2n+1}{k}$. On a donc bien :

$$P(R_k) = \binom{2n+1}{k} x^k (1-x)^{2n+1-k} \qquad (2)$$

Les égalités (1) et (2) donnent le résultat souhaité :

$$\boxed{G_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} x^k (1-x)^{2n+1-k}}$$

b) Comme V_{n+1} est à valeurs dans $[0;1]$ on a aussi : pour tout $x < 0$: $G_{n+1}(x) = 0$ et pour tout $x > 1$: $G_{n+1}(x) = 1$. G_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 et en 1. On trouve une densité g_{n+1} de V_{n+1} en dérivant G_{n+1} en tout point $x \neq 0, 1$. Donc si $x < 0$ ou $x > 0$: $g_{n+1}(x) = 0$. Et si $x \in]0;1[$, par linéarité de la dérivation :

$$g_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(k x^{k-1} (1-x)^{2n+1-k} - (2n+1-k) x^k (1-x)^{2n-k} \right)$$

donc

$$g_{n+1(x)} = \underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} k x^{k-1} (1-x)^{2n+1-k}}_{\text{on note } S_1 \text{ cette somme}} - \underbrace{\sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (2n+1-k) x^k (1-x)^{2n-k}}_{\text{on note } S_2 \text{ cette somme}}$$

On ré-écrit la somme S_1 :

$$S_1 = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!} k x^{k-1}(1-x)^{2n+1-k} = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{(k-1)!(2n+1-k)!} x^{k-1}(1-x)^{2n+1-k}$$

On ré-écrit maintenant la somme S_2. Comme le terme $(2n+1-k)$ vaut 0 pour $k = 2n+1$, on a :

$$S_2 = \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n+1}{k} (2n+1-k) x^k (1-x)^{2n-k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(2n+1)!}{k!(2n+1-k)!}(2n+1-k)x^k(1-x)^{2n-k}$$

$$= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{(2n+1)!}{k!(2n-k)!} x^k (1-x)^{2n-k}$$

On fait un changement d'indice $i = k+1$. On obtient :

$$S_2 = \sum_{i=n+2}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{(i-1)!(2n+1-i)!} x^{i-1}(1-x)^{2n+1-i}$$

On a donc :

$$g_{n+1}(x) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{(k-1)!(2n+1-k)!} x^{k-1}(1-x)^{2n+1-k} - \sum_{i=n+2}^{2n+1} \frac{(2n+1)!}{(i-1)!(2n+1-i)!} x^{i-1}(1-x)^{2n+1-i}$$

Il ne reste que le terme $k = n+1$ de la première somme :

$$g_{n+1}(x) = \frac{(2n+1)!}{n!n!} x^n (1-x)^n$$

Enfin on pose $g_{n+1}(0) = g_{n+1}(1) = \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2} 0^n$. On a obtenu la densité suivante de V_{n+1} :

$$\boxed{g_{n+1}(x) = \begin{cases} \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2} x^n (1-x)^n & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

On reconnaît la fonction b_n, densité de X_n. Bilan :

les variables aléatoires X_n et V_{n+1} ont la même densité donc elles ont $\boxed{\text{la même loi}}$

c) Le programme renvoie la valeur médiane du tableau `U` c'est-à-dire $\boxed{8}$ En effet :

$$1 \leqslant 2 \leqslant 5 \leqslant 8 \leqslant 9 \leqslant 13 \leqslant 23$$

d) D'après la question 12.b, il suffit de simuler la variable aléatoire V_{n+1}, c'est-à-dire la $\boxed{\text{valeur médiane}}$ de $U_1, \ldots, U_{2n+1}$. D'où le programme suivant :

```
n = input('Entrez la valeur de n : ')
U = grand(1,2*n+1,'unf',0,1)
X = median(U) // simulation de Xn
```