DM n° 12 - pour le 17/02/25

Commencez par réviser le cours sur les variables à densité (lois usuelles notamment) et sur l'estimation. Ce problème est long : essayez de faire le maximum en 2h30 et allez jusqu'à 3h de travail.

PROBLEME

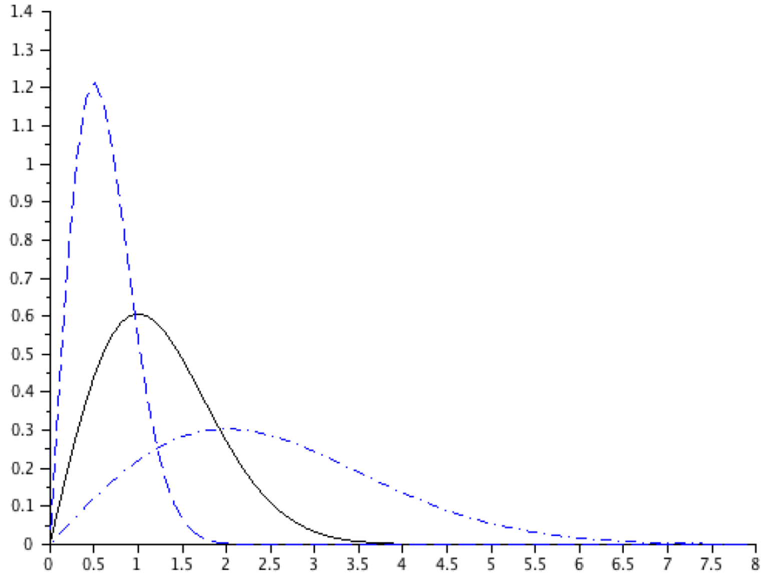
Les variables aléatoires considérées dans ce problème seront toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On notera Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

Soit σ un réel strictement positif, on note f_σ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{t}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

I. Etude de la loi de Rayleigh

1. (a) Justifier que f_σ est une densité de probabilité.
   (b) Donner le tableau de variations de f_σ
   (c) Le graphique ci-dessus correspond aux courbes représentatives de f_1, $f_{1/2}$ et f_2



Mais quelle courbe correspond à quelle fonction ? Justifier votre réponse !

Soit X une variable aléatoire de densité f_σ, on dit que X suit la loi de Rayleigh de paramètre σ, notée $\mathcal{R}(\sigma)$

2. (a) Expliciter la fonction de répartition de X notée F_X.
   (b) Montrer que F_X réalise une bijection de $[0, +\infty[$ vers $[0,1[$ et expliciter sa bijection réciproque.
   (c) En utilisant la méthode d'inversion, écrire une fonction Python intitulée `def Rayleigh(s):` (où s est le paramètre σ) simulant la variable X.

3. **Moments de la loi de Rayleigh**

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $E(X^n)$ existe. A l'aide du changement de variables $u = \frac{t^2}{2\sigma^2}$, montrer ensuite que
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ E(X^n) = 2^{\frac{n}{2}} \sigma^n \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)$$
   (b) On rappelle que $\Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
   En déduire l'espérance de X et la variance de X en fonction de σ.

4. Déterminer la loi de $Y = X^2$ et retrouver la valeur de $E(X^2)$

Pour toute la suite de ce problème : on suppose que $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi de Rayleigh de paramètre σ

II. Minimum et conditionnement

On considère une variable aléatoire N indépendante de la suite $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ et suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Z_n = Min(X_1, \ldots, X_n)$ et $Z_N = Min(X_1, \ldots, X_N)$ définie par

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z_N(\omega) = Min\big(X_1(\omega), \ldots, X_{N(\omega)}(\omega)\big)$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
   (a) Montrer que Z_n suit une loi de Rayleigh dont on précisera le paramètre.
   (b) Préciser l'espérance et la variance de Z_n.

2. (a) Ecrire en `Python` un script simulant et affichant Z_N pour σ et p entrés par l'utilisateur.
   (b) Déterminer la fonction de répartition de Z_N.
   (c) Justifier que Z_N est une variable aléatoire à densité et qu'une de ses densités est g où

$$\forall x < 0,\ g(x) = 0 \ \text{ et } \ \forall x \geq 0,\ g(x) = \frac{p\, x\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2 \left(1 - (1-p)\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)^2}$$

(d) A l'aide de la formule de l'espérance totale, justifier l'existence de l'espérance de Z_N et écrire $E(Z_N)$ sous forme d'une somme de série.

(e) Ecrire en `Python` un script permettant d'afficher la somme partielle de rang 1000 de cette série.

III. Estimation du paramètre de la loi de Rayleigh

1. Soit $\alpha \in]0,1[$, montrer qu'il existe un unique réel $\varepsilon > 0$ tel que $2\Phi(\varepsilon) - 1 = 1 - \alpha$

2. **Première méhode : via la moyenne empirique**

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on pose } \ M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

3. (a) Expliciter, à l'aide de M_n un estimateur sans biais et convergent de σ noté T_n

   (b) Expliciter la variable aléatoire centrée-réduite associée à T_n, notée T_n^*.

   (c) Etudier la convergence en loi de T_n^*.

   (d) En déduire un intervalle de confiance asymptotique pour σ au risque α.

4. **Deuxième méthode : maximum de vraisemblance**

   Soient $x_1, \dots, x_n$, n réels strictement positifs, on considère la fonction de vraisemblance qui est la fonction L définie sur $]0, \infty[$ par $\forall \sigma > 0,\ L(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} f_\sigma(x_i)$

5. (a) Expliciter $G(\sigma) = \ln\big(L(\sigma)\big)$ pour tout $\sigma > 0$.

   (b) Etudier G sur $]0, +\infty[$

   (c) En déduire que L admet un maximum en $\sigma = \sqrt{\dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

6. Soit $W_n = \sqrt{\dfrac{1}{2n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$ l'estimateur du maximum de vraissemblance de σ.

   (a) A l'aide du **I.4**, déterminer la loi de $\dfrac{1}{2\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2$

   (b) En déduire que W_n^2 est un estimateur sans biais et convergent de σ^2

   (c) Montrer que W_n est un estimateur convergent de σ