Chapitre 14 - Fonctions de n variables I

Objectif du cours : faire de l'**optimisation**, c'est-à-dire déterminer les extrema d'une fonction de n variables, pour ensuite maximiser ou minimiser une certaine quantité.

Dans tout ce chapitre, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et l'espace $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire euclidien canonique, noté $\langle .,. \rangle$ et de la norme euclidienne associée :

$$\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

On considérera les éléments de $\mathbb{R}^n$ tantôt comme des points, tantôt comme des vecteurs.

I. Ouvert de $\mathbb{R}^n$, boule ouverte

Définition I.1
Notion de distance
Soit $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $b = (b_1, \cdots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. On note :

$$d(a,b) = \|b - a\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)^2}$$

la **distance** entre a et b.

Remarque
Inégalité triangulaire : $\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}^n)^3$, $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$.

Définition I.2
Boule ouverte
Soit $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. On note

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n; \ \ d(x,a) < r\} = \{x \in \mathbb{R}^n; \ \ \|x - a\| < r\}$$

la boule ouvert de centre a et de rayon r.

Remarque
En dimension $n = 2$, on parle du disque ouvert de centre a et de rayon r.

Définition I.3
Ouvert de $\mathbb{R}^n$
Soit Ω un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$.
On dit que $\boxed{\Omega \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^n \text{ si : } \forall a \in \Omega, \ \exists r > 0; \ \ B(a,r) \subset \Omega}$
Par convention, on dit que $\emptyset$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Exemple
Ouverts de référence :

- $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- Toute boule ouverte est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- Toute réunion d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- Toute intersection finie d'ouverts de $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- Théorème (voir plus loin) : soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$.
  1. $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \ \ f(x_1, \cdots, x_n) > a\} = f^{-1}(]a; +\infty[)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$
  2. $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \ \ f(x_1, \cdots, x_n) < a\} = f^{-1}(]a; +\infty[)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$

  La notion de continuité pour une fonction de n variables sera vue plus loin !!

Un ensemble ouvert est un ensemble qui ne contient aucun point de sa "frontière"

II. Fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$

II.1) Exemples de fonctions à plusieurs variables

Définition II.1
Fonctions affines
Soit f une application définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que f est affine s'il existe une $(n+1)$-liste $(a_1, \cdots, a_n, b)$ de réels tels que

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, \cdots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right) + b$$

Si $n = 2$, f est une fonction affine s'il existe des réels (a_1, a_2, b) tels que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = a_1 x + a_2 y + b$$

Il est possible de définir une fonction à deux variables dans Python :

```
def f(x,y):
    return x+2*y+3
```

Définition II.2
Les fonctions polynômes
Soit f une application définie sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
On dit que la fonction f est **polynomiale** s'il existe un entier p non nul, une p-liste $(\alpha_1, \cdots, \alpha_p)$ de réels et pour tout i de $[[1,p]]$, une n-liste $(\beta_{1,i}, \cdots, \beta_{n,i})$ d'entiers tels que

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_1^{\beta_{1,i}} \cdots x_n^{\beta_{n,i}}$$

Exemple

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^2 - 2xy + y^2 \end{array}$ est une fonction polynomiale.

2. $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & x^6 - 3x^2y^3 + x - 3y + 5 \end{array}$ est une fonction polynomiale.

3. $h : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & x^4z + y^5 + xy^2z - 7x \end{array}$ est une fonction polynomiale.

Exemples de fonctions non polynômiales définies sur $\mathbb{R}^n$:

$v : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto & \dfrac{1}{1+\sum_{i=1}^n x_i^2} \end{array}$, $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto & e^{-x_1-x_2-\dots-x_n} \end{array}$

II.2) Graphe d'une fonction de plusieurs variables

Définition II.3
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On appelle **graphe de** f l'ensemble Γ_f de points $(x_1, \cdots, x_n, y)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ tels que $y = f(x_1, \cdots, x_n)$.

$$\Gamma_f = \{(x_1, \cdots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1},\ y = f(x_1, \cdots, x_n)\}$$

On appelle **équation du graphe de** f l'équation $y = f(x_1, \cdots, x_n)$.

Si $n = 2$, le graphe de f est une **surface** (aussi appelée **nappe**). Dans ce cas on écrit plutôt le graphe de f sous la forme:

$$\Gamma_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z = f(x,y)\}$$

II.3) Tracé Python d'une surface

On commence par l'importation suivante :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
ax = plt.axes(projection = '3d')
```

Si x et y sont des matrices lignes de taille n et m, l'instruction

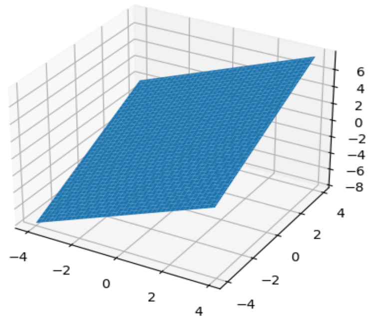
```
X,Y=np.meshgrid(x,y)
```

permet de construire le maillage $((x_i, y_j))_{(i,j)\in[[1,n]]\times[[1,m]]}$.
On effectue alors le tracé via :

```
ax.plot_surface(X,Y,f(X,Y))
plt.show()
```

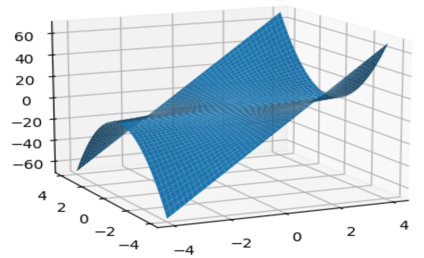
Exemple

```
def f(x,y):
    return x+y
x=np.arange(-4,4,0.1)
y=np.arange(-4,4,0.1)
X,Y=np.meshgrid(x,y)
ax.plot_surface(X,Y,f(X,Y))
plt.show()
```

Exemple
Graphe de $f(x,y) = x + xy^2$

```
def f(x,y):
    return x+x*y**2
x=np.linspace(-4,4,100)
y=np.linspace(-4,4,100)
X,Y=np.meshgrid(x,y)
ax.plot_surface(X,Y,f(X,Y))
plt.show()
```



II.4) Ligne de niveau d'une fonction de deux variables

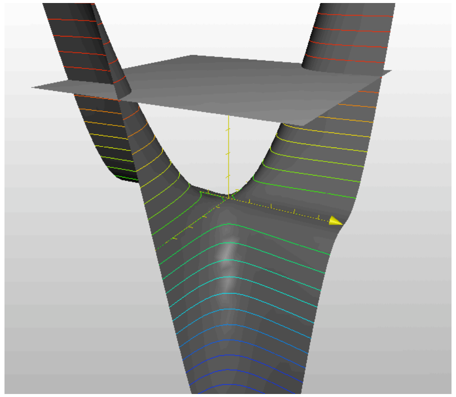
Définition II.4
Soient f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et λ un réel.
On appelle ligne de niveau λ de f l'ensemble des points (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tels que

$$f(x,y) = \lambda$$

Autrement dit, la ligne de niveau L_λ est

$$L_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ f(x,y) = \lambda\}$$

Remarque
La ligne de niveau λ est l'intersection du graphe Γ de f (surface) et du plan d'équation $z = \lambda$.



II.5) Représentation d'une ligne de niveau en Python

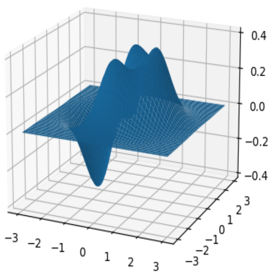
Soit `X`, `Y` un maillage du domaine $[a, b] \times [c, d]$ et f une fonction de deux variables. La commande

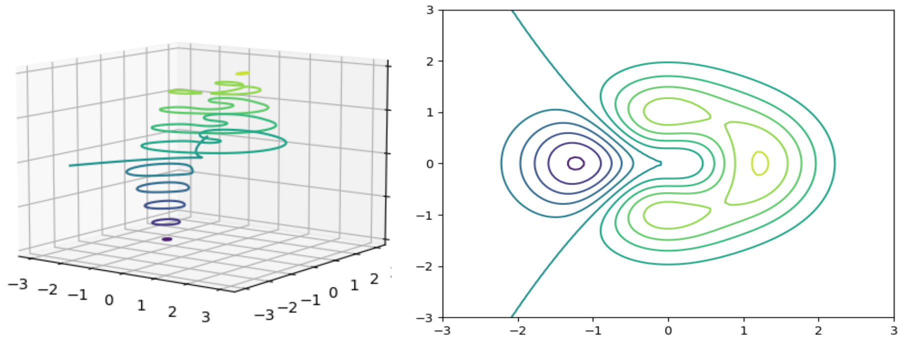
`plt.contour(X,Y,f(X,Y),N)` ou `plt.contour(X,Y,f(X,Y),T)`

trace les lignes de niveau de la fonction f, avec au choix :

- un entier N : dans ce cas on obtient $N-1$ lignes de niveau entre les valeurs minimales et maximales de f sur le maillage;
- une liste T : dans ce cas on obtient les lignes de niveau associées aux valeurs contenues dans T.

Exemple
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto (x^3 + y^2).e^{-(x^2+y^2)}$.
Tracer le graphe de f ainsi que 10 lignes de niveau, sur le domaine $[-3, 3] \times [-3, 3]$.
Pour représenter les lignes de niveau dans le plan, on doit supprimer la commande `ax = plt.axes(projection = '3d')` (on peut la mettre en commentaire). On peut les voir dans l'espace en laissant la commande.





III. Extrema locaux des fonctions à plusieurs variables

La recherche d'extrema pour de telles fonctions (issues par exemple de l'économie) est un des objectifs du programme.

Définition III.1
Soit Ω un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$, a un point de Ω et $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

1. On dit que f admet un **maximum global (ou absolu) en** a **sur** Ω si : $\forall x \in \Omega, \quad f(a) \geqslant f(x)$.

   Le maximum de f sur Ω est alors $M = f(a)$ et on note $M = Max_\Omega(f)$.
   On dit que ce maximum est **strict** si $\forall x \in \Omega \setminus \{a\}$, $f(a) > f(x)$.

2. On dit que f admet un **minimum global (ou absolu) en** a **sur** Ω si $\forall x \in \Omega, \quad f(a) \leqslant f(x)$.

   Le minimum de f sur Ω est alors $m = f(a)$ et on note $m = min_\Omega(f)$.
   On dit que ce minimum est **strict** si $\forall x \in \Omega \setminus \{a\}$, $f(a) < f(x)$.

3. On dit que f admet un **maximum local en** a **sur** Ω si :
$$\exists r > 0; \quad \forall x \in B(a, r) \cap \Omega, \quad f(a) \geqslant f(x)$$

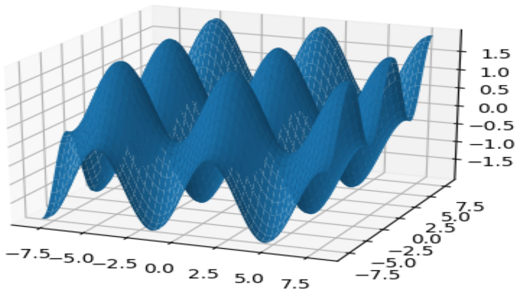
4. On dit que f admet un **minimum local en** a **sur** Ω si :
$$\exists r > 0; \quad \forall x \in B(a, r) \cap \Omega, \quad f(a) \leqslant f(x)$$

Dans tous les cas, on dit que f admet un **extremum** (global ou local) en a.

Remarque

- Extremum global $\Rightarrow$ extremum local. Réciproque fausse !!
- f a un unique maximum global; f peut avoir plusieurs maximums locaux.
- Un maximum global peut être atteint en plusieurs points, ou en un seul point (maximum strict).

Exemple
On considère la fonction $f(x,y) = \sin(x) + \sin(y)$. On trace son graphique en Python :



Que peut-on conjecturer quand à ses extrema ?

Remarque
importante en pratique
Pour étudier sans utiliser plus de théorie un extremum en a, on peut étudier le signe de $f(x) - f(a)$.
On travaille soit de faqn globale (pour tout $x \in \Omega$), soit de façon locale (pour x au voisinage de a).
On pose parfois $x = a + h$ où h est tel que $a + h \in \Omega$.

Exercice 1

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, où $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+1}$. Etudier les extrema globaux de f.
2. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, où $g(x,y) = e^x.y$. Etudier les extrema globaux.
   Montrer qu'en $O = (0,0)$, g n'admet pas d'extremum local.

IV. Continuité d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

IV.1) Définition

Définition IV.1
Soit Ω un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \Omega$.

1. f est continue en a si :
$$\forall \epsilon > 0, \exists r > 0; \quad (x \in \Omega \text{ et } \|x - a\| \leq r) \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \epsilon$$
2. f est continue sur Ω si f est continue en tout point $a \in \Omega$

Remarque
On pourrait aussi définir la notion de limite en a (mais **hors-programme**)
On ne reviendra pas souvent à cette définition. Le programme exclut toute étude délicate de continuité.

IV.2) Continuité des fonctions usuelles

Théorème IV.1
Les fonctions affines sont continues sur $\mathbb{R}^n$.
Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème IV.2
Théorèmes généraux (admis)
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $g : \Omega \to \mathbb{R}$, $a \in \Omega$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. (a) Si f et g sont continues en a, alors $f+g$, $f \times g$, $\lambda.f$ sont continues en a.
   (b) Si f et g sont continues sur Ω, alors $f+g$, $f \times g$, $\lambda.f$ sont continues sur Ω.
2. (a) Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.
   (b) Si f et g sont continues sur Ω et g ne s'annule pas sur Ω alors $\frac{f}{g}$ est continue sur Ω.

Théorème IV.3
Composition version 1
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$, à valeurs dans un intervalle I. Soit $g : I \to \mathbb{R}$.
Soit $a \in \Omega$.

1. Si f est continue en $a \in \Omega$ et g continue en $f(a)$, alors $g \circ f$ est continue en a.
2. Si f est continue sur Ω et g est continue sur I, alors $g \circ f$ est continue sur Ω.

Se prouve via la définition, analogue aux fonctions d'une variable (**admis**).

Théorème IV.4
Composition version 2
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$, soit $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \Omega$.
Soit $u_1 : I \to \mathbb{R}$, ..., $u_n : I \to \mathbb{R}$ n fonctions d'une variable, définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $b \in \mathbb{R}$.

Si f est continue en $a = (a_1, \cdots, a_n)$ et si pour tout $k \in [[1,n]]$, $\lim_{t \to b} u_k(t) = a_k$, alors
$$\lim_{t \to b} f(u_1(t), \cdots, u_n(t)) = f(a) \quad (^*)$$

Remarque
Ce théorème peut être utile pour montrer qu'une fonction f de n variables **n'est pas** continue en un point.
Mais ce n'est pas dans l'esprit du programme....
Si nécessaire, on considère des fonctions de la forme $u_k : t \mapsto \lambda.t$ pour obtenir une contradiction sur $(*)$.

Théorème IV.5
(Important dans la pratique)
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}$.

1. $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \quad f(x_1, \cdots, x_n) > a\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$
2. $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \quad f(x_1, \cdots, x_n) < a\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$

Exemple

- Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, où $f(x, y, z) = 3x^2y - 4xyz + z^4$. f est polynômiale donc continue sur $\mathbb{R}^3$.
- Soit $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, où

$$N(x_1, \cdots, x_n) = \|(x_1, \cdots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

  N est continue sur $\mathbb{R}^n$ car ...

- Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ où $f(x, y) = \ln(x + y) + \cos(x^2.y)$.

  1. Déterminer l'ensemble de définition Ω de f et justifier que Ω est un ouvert.
  2. Prouver que f est continue sur Ω.

V. Dérivées partielles d'ordre 1, fonction de classe $\mathcal{C}^1$

V.1) Dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la $i^{\text{ème}}$ variable

Définition V.1
Fonction partielle et dérivée partielle

Soit Ω un **ouvert** non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$.
Soit $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \Omega$.

1. Soit $i \in [[1, n]]$. On appelle i-ième fonction partielle de f au point a la fonction $f_{a,i}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie au voisinage de a_k par

$$f_{a,i}(x) = f(a_1, \cdots a_{i-1}, x, a_{i+1}, \cdots, a_n)$$

2. Soit $i \in [[1, n]]$. On dit que f admet une dérivée partielle en a par rapport à la i-ème variable x_i si la i-ème fonction partielle en a : $f_{a,i} : x \mapsto f(a_1, \cdots a_{i-1}, x, a_{i+1}, \cdots, a_n)$ est dérivable en a_i.
Dans ce cas, on note $\boxed{\partial_i f(a) = f'_{a,i}(a_i)}$

Remarque
Autres notations (utilisées dans les programmes précédents) : $\partial_i f(a) = \dfrac{df}{dx_i}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

Remarque
On est donc ramené à étudier la dérivabilité en un point d'une fonction d'une variable **en fixant les autres variables**, en général avec les théorèmes généraux, ou (très) exceptionnellement en étudiant un

taux d'accroissement :

$$\begin{aligned} & f_{a,i} : x \mapsto f(a_1, \cdots a_{i-1}, x, a_{i+1}, \cdots, a_n) \text{ est dérivable en } a_i \\ \Leftrightarrow \quad & \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \cdots, a_n) - f(a_1, \cdots, a_n)}{h} = L \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exemple
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy - 5x + 6$.
Déterminer les dérivées partielles en (x, y), puis donner ses dérivées partielles en $a = (0, 1)$.

Définition V.2
Dérivées partielles d'ordre 1 sur un ouvert

Soit Ω un **ouvert** non vide de $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$.
Soit $i \in [[1, n]]$. Si f admet en tout point de Ω une dérivée partielle par rapport à la i-ième variable, alors l'application :

$$\partial_i f : \Omega \to \mathbb{R}, \quad (x_1 \cdots, x_n) \mapsto \partial_i f(x_1, \cdots, x_n)$$

est la (fonction) dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la i-ème variable x_i.

Exercice 2

1. Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, définie par $f(x, y, z, t) = xy + x^2z + y^3 - x^4$.
Déterminer les dérivées partielles de f.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $g(x, y, z) = \dfrac{x^3}{1 + x^2 + y^2 + z^2}$.
Déterminer les dérivées partielles de f.

Théorème V.1
Théorèmes généraux
Les règles usuelles de dérivation s'appliquent.

1. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f et g deux fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$, $a \in \Omega$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $i \in [[1, n]]$.
Si f et g admettent une dérivée partielle en a par rapport à la i-ième variable, alors il en est de même pour $f + g$, $f.g$, $\lambda.f$ et $\dfrac{f}{g}$ (si $g(a) \neq 0$) et

$$\boxed{\partial_i(f + g)(a) = \partial_i(f)(a) + \partial_i(g)(a); \quad \partial_i(f.g)(a) = \partial_i(f)(a).g(a) + f(a).\partial_i(g)(a)}$$
$$\boxed{\partial_i(\lambda f)(a) = \lambda \partial_i(f)(a); \quad \partial_i(\tfrac{f}{g})(a) = \frac{\partial_i(f)(a).g(a) - f(a).\partial_i(g)(a)}{(g(a))^2}}$$

2. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $a \in \Omega$ et $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie sur un intervalle I contenant $f(\Omega)$.
Si f admet une dérivée partielle en a par rapport à la i-ème variable x_i et si G est dérivable en $f(a)$, alors $G \circ f$ admet une dérivée partielle en a par rapport à la i-ème variable x_i et

$$\boxed{\partial_k(G \circ f)(a) = G'(f(a)).\partial_i(f)(a)}$$

V.2) Gradient

Définition V.3
Gradient d'une fonction
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction définie de Ω dans $\mathbb{R}$ et $a \in \Omega$.

Lorsque, pour tout tout entier i de $[[1, n]]$, la fonction f admet une dérivée partielle d'ordre 1 selon la $i^{\text{ème}}$ variable en a, on appelle **gradient de f en** a, le vecteur de $\mathbb{R}^n$ noté $\nabla f(a)$ tel que

$$\nabla f(a) = \Big(\partial_1(f)(a)\ ,\ \partial_2(f)(a)\ ,\ \cdots\ ,\ \partial_n(f)(a)\Big)$$

Exemple
- Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = x^4 + 4x^3y + 5x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$ et $a = (1, -1)$.
  Déterminer le gradient de f en (x, y) quelconque, puis en a.
- Soit f une fonction de $\mathbb{R}^3$ définie par : $\forall (x, y, z)$, $f(x, y, z) = xe^z + ye^x + ze^y$ et $a = (1, 1, 1)$.
  Déterminer le gradient de f en (x, y, z) quelconque, puis en a.

Proposition V.1
Hors-programme, traduction des relations sur les dérivées partielles
Sous réserve d'existence,

$$\nabla(f + g)(a) = \nabla(f)(a) + \nabla(g)(a), \qquad \nabla(\alpha f)(a) = \alpha\nabla(f)(a)$$

$$\nabla(f \times g)(a) = g(a)\nabla(f)(a) + f(a)\nabla(g)(a), \qquad \nabla\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{1}{(g(a))^2}\left(g(a)\nabla(f)(a) - f(a)\nabla(g)(a)\right)$$

Proposition V.2
(Admis)
Les vecteurs gradients sont orthogonaux aux lignes de niveaux (**au programme cf sujet Ecricome**)

V.3) Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$

Définition V.4
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit f une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On dit que f **est de classe $\mathcal{C}^1$ sur** Ω lorsque
- f admet des dérivées partielles en tout point de Ω
- $\forall i \in [[1, n]]$, $\partial_i(f)$ est continue sur Ω.

Théorème V.2
Théorèmes généraux
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit f et g des fonctions définies sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, alors $f + g$, $f.g$, $\lambda.f$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.
- Si de plus g ne s'annule pas sur Ω alors $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.

Théorème V.3
Composition
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$, à valeurs dans I intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $G : I \to \mathbb{R}$.
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et si G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors $G \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et

$$\forall a \in \Omega, \quad \forall i \in [[1, n]], \quad \partial_i(G \circ f)(a) = G'(f(a)).\partial_i(f)(a)$$

Théorème V.4
Les fonctions de références
- Les fonctions affines sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
- Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$

Exemple
Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \dfrac{xy^3}{1 + x^2 + y^2}$ Montrer que f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses fonctions dérivées partielles.

VI. Développement limité d'ordre 1

VI.1) DL d'ordre 1

Théorème VI.1
Théorème et définition (Admis)
Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.
Soit $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega$.

1. Il existe une fonction $\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $(0, .., 0)$, continue en $(0, ..., 0)$ où $\epsilon(0, ..., 0) = 0$, telle que pour h voisin de $(0, ..., 0)$,
$$f(x + h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h\rangle + \|h\| .\epsilon(h)$$
c'est à dire pour $h = (h_1, \cdots, h_n)$,
$$f(x_1 + h_1, \cdots, x_n + h_n) = f(x_1, \cdots, x_n) + \sum_{i=1}^{n} \partial_i(f)x.h_i + \sqrt{h_1^2 + \cdots + h_n^2}.\epsilon(h_1, \cdots, h_n)$$
2. On dit que f admet en $x = (x_1, \cdots, x_n)$ un **développement limité d'ordre** 1.
   Celui ci est unique.

Remarque
Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, d'après la formule de Taylor-Young elle admet en tout $x \in \mathbb{R}$ le DL d'ordre 1 : $f(x+h) = f(x) + f'(x).h + h.\epsilon(h)$.

Remarque
Conséquence de ce théorème : si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω, alors f est aussi continue sur Ω.

VI.2) Dérivée de $g(t) = f(x+th)$

Théorème VI.2
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, soit $x \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}^n$ et g définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $x + th \in \Omega$ par :

$$g(t) = f(x+th)$$

Alors g est dérivable en tout t de son domaine de définition et

$$g'(t) = \langle \nabla f(x+th), h \rangle$$

En particulier $g'(0) = \langle \nabla f(x), h \rangle$.

Exercice 3
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, où $f(x,y) = x.\cos(y) + y.e^x$.
Soit $O = (0,0)$, $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f(0+t.h)$. Calculer $g'(t)$.

VII. Condition nécessaire d'existence d'un extremum local

Théorème VII.1
Condition nécessaire du premier ordre d'existence d'un extremum local

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω.
Soit $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \Omega$.

1. Si
   - f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert Ω
   - $a \in \Omega$
   - f admet en a un extremum local

   alors $\nabla f(a) = 0$, c'est-à-dire que pour tout $i \in [[1,n]]$, $\partial_i(f)(a) = 0$.
2. On dit que a est un **point critique de** f ssi $\nabla f(a) = (\partial_1(f)(a), \cdots, \partial_n(f)(a)) = (0, \cdots, 0)$.
3. Si a est un point critique et f n'admet pas d'extremum en a, on dit que a est un **point col** (comme un col de montagne !), ou **point selle** (comme une selle de cheval !) de f.

Remarque
1. Parallèle avec le cas des fonctions d'une variable : si $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle I ouvert admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$. La réciproque est fausse : contre-exemple classique de la fonction cube $f : x \mapsto x^3$ telle que $f'(0) = 0$ mais f n'admet pas d'extremum local en 0.
2. La preuve est simple : pour tout $i \in [[1,n]]$, la fonction $f_{a,i} : x \mapsto f(a_1, \cdots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \cdots, a_n)$ dérivable en a_i admet un extremum local en a_i (où a_i n'est pas une borne de $\mathcal{D}f_{a,i}$)
donc $\partial_i(f)(a) = f'_{a,i}(a_i) = 0$.
3. **La réciproque est fausse :** en un point critique, f n'admet pas forcément d'extremum.
L'étude du signe de $f(a+h) - f(a)$ **globale ou locale permet de le confirmer ou non**

VIII. Exercices

Quelques techniques, à adapter à chaque exercice

Pour **étudier les extrema** de f, on commence souvent par la **recherche d'éventuels points critiques**.

- Si f **n'admet aucun point critique** sur l'ouvert Ω, alors f n'a **aucun extremum** (local ou global) sur Ω.
- Si a **est un point critique de** f :
  - étude du signe de $f(a+h) - f(a)$ où h tel que $a + h \in \Omega$ (cas global) ou h voisin de $(0,...,0)$ (cas local);
  - variante : étude du signe de $f(b) - f(a)$ où $b \in \Omega$ (cas global) ou b voisin de a (cas local);
  - si $f(a+h) - f(a)$ change de signe dans toute boule de centre a, f n'admet pas d'extremum local en a : a est un point col.
  - en laissant un degré de liberté montrer que f tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ pour justifier que f n'admet pas d'extremum global en a : cf exercices...

Des techniques plus performantes via les dérivées partielles d'ordre 2 **seront mises en place dans le chapitre suivant.**

Exercice 4
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que

$$f(x,y) = x.y^2 + exp(xy)$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles.
2. Préciser le gradient de f en $a = (1,1)$, donner le DL à l'ordre 1 en a.
3. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$.
4. (a) En observant le signe de $f(x,x) - 1$ et de $f(x,-x) - 1$, justifier que f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$.
   (b) Justifier que f n'admet pas d'extremum local en $(0,-1)$.
5. Conclure quand à l'étude des extremums de f.

Exercice 5
Soit $n \geq 2$ et

$$f : \Omega = (\mathbb{R}_+^*)^n \to \mathbb{R}, \quad \text{où } f(x_1, \cdots, x_n) = \ln(\prod_{k=1}^{n} x_k)$$

1. (a) Justifier que $\Omega = (\mathbb{R}_+^*)^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
   (b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et déterminer les dérivées partielles de f.
2. Préciser le gradient en $a = (1, \cdots, 1)$, le DL à l'ordre 1 en a.
3. Etudier les extremums de f sur Ω.

Exercice 6
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ où $f(x,y) = \int_x^{x.y} \exp(t^2).dt$

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}^2$.
2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles. sur $\mathbb{R}$

Exercice 7
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ où $f(x,y) = x.y$.
Etudier les extrema de f locaux et globaux.

Exercice 8
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ où $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + x - y + 3$.
Etudier les extrema de f locaux et globaux.

Exercice 9
Soit $n \geq 3$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, où $f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n-1} x_k.x_{k+1}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer les dérivées partielles de f.
2. Dans le cas où n est pair, étudier les extrema de f.
3. Si $n = 3$, déterminer les points critiques de f.

Exercice 10
Soit $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, où

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} (1 - x_k)^4 + (\sum_{k=1}^{n} x_k)^4$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ et calculer ses dérivées partielles.
2. Prouver que f admet un unique point critique. Le déterminer.