Exercices - Chapitres 14 et 15 - Fonctions de n variables

Exercice 1
Soit pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=\ln(x^2+y^2+1)$.
Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1.
Calculer les points critiques de f et étudier les extrema de f.

Exercice 2
Recherche d'extrema
On note $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f(x,y)=x^2-3xy+3y^2+1$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et montrer que f admet un seul point critique.
2. En déduire que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$ et n'admet pas de maximum sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3
Soit $f:(x,y,z)\mapsto x^3+y^3+z^3-3xyz$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et déterminer les dérivées partielles de f.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Etudier la fonction $t\longmapsto f(t,t,2t)$. En déduire que f n'admet pas d'extremum en $(0,0,0)$.

Exercice 4
Recherche d'extrema
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f(x,y)=x^2(1+y)^3+y^2$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et que f admet un unique point critique.
2. (a) Montrer que si $\|(x,y)\|\leq 1$ alors $f(x,y)\geq 0$.
   (b) En déduire que f admet un minimum local.
   (c) Ce minimum est-il un minimum global ?

Exercice 5
Recherche d'extrema
On note $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y)=xe^{x(y^2+1)}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet un seul point critique $a=(-1,0)$.
3. (a) Montrer que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, \quad f(x,y)\geq xe^x$.
   (b) En étudiant la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=xe^x$, montrer que f admet un extremum global sur $\mathbb{R}^2$

Exercice 6
Recherche d'extrema
On note $D=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$
Soit f la fonction définie sur D par $\forall(x,y,z)\in D \quad f(x,y,z)=\dfrac{xz}{y}-z-x+\dfrac{1}{2}y^2$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D et que f admet un unique point critique A.
2. Calculer la matrice hessienne de f en A.
3. Est-ce que f admet un extremum en A ?

Exercice 7
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^n$ par
$$\forall(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n,\quad f(x_1,\dots,x_n)=\exp\Big(n+1-\sum_{k=1}^n x_k\Big)+\sum_{k=1}^n e^{x_k}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
2. Déterminer le gradient ∇f de f. En déduire que f admet un unique point critique noté $\widehat{x}$.
3. (a) Calculer la hessienne $\nabla^2 f(\widehat{x})$ de f en ce point critique.
   (b) Montrer que $\forall X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}, {}^tX\nabla^2 f(\widehat{x})X>0$.
4. En déduire que f admet en $\widehat{x}$ un minimum local.

Exercice 8
Recherche de développement limité
On considère la fonction f définie par $\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \quad f(x,y,z)=xyz+xy+yz+xz$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le gradient de f en $(1,0,1)$, puis le développement limité de f à l'ordre 1 en $(1,0,1)$.
3. Déterminer la matrice hessienne de f en $(1,0,1)$, puis le développement limité de f à l'ordre 2 en $(1,0,1)$.

Exercice 9
Forme quadratique sur la sphère de rayon 1
Soit n un entier naturel non nul.
Soit A une matrice symétrique réelle d'ordre n non nulle.
Soit q la forme quadratique associée à la matrice A.
On note $\mathcal{S}=\{x\in\mathbb{R}^n, \text{tel que } \|x\|=1\}$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est un ensemble fermé et borné de $\mathbb{R}^n$.
2. En déduire que q admet un minimum global et un maximum global sur S.
3. On note $\alpha=\min\limits_{\lambda\in Sp(A)}(\lambda)$ et $\beta=\max\limits_{\lambda\in Sp(A)}(\lambda)$. Montrer que : $\forall h\in\mathbb{R}^n \quad \alpha\|h\|^2\leq q(h)\leq\beta\|h\|^2$.
4. Justifier que le maximum global de q sous la contrainte $\|x\|=1$ est atteint en un point qui est un vecteur propre de A associé à la plus grande valeur propre de A, et que le minimum global de q sous la contrainte $\|x\|=1$ est atteint en un point qui est un vecteur propre de A associé à la plus petite valeur propre de A

Exercice 10
Recherche d'extrema

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad f(x,y)=x^3+y^3-9xy+10$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer les points critiques de f.
2. Est-ce que f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$?
3. Est-ce que f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? On pourra calculer $f(0,t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}$

Exercice 11
Un peu de topologie
Les questions ci-dessous sont indépendantes.

1. Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ -1 \leq x \leq 2 \text{ et } x^2+y^2 \leq 4\}$.
   Représenter graphiquement E; justifier que E est un fermé borné.
2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, où $f(x,y) = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$.
   Déterminer l'ensemble de définition Δ de f; justifier que Δ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Représenter graphiquement Δ.
3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, où $f(x,y) = \sqrt{x+1} + \sqrt{-x^2-y^2-4x}$. Déterminer l'ensemble de définition Δ de f; justifier que Δ est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$. Représenter Δ. Justifier que f admet un maximum et un minimum sur Δ.
4. Soit $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x < y < z\}$. Justifier que E est un ouvert.

Exercice 12
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, où $f(x,y,z) = x^2+y^2-2.\ln(y-x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition Δ de f. Justifier que Δ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Δ.
2. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f. Montrer que f n'admet qu'un seul point critique A et le déterminer.
3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f en tout point $m = (x,y)$ de Δ.
   En déduire la hessienne de f en m et la forme quadratique associée en m. Montrer que cette forme quadratique est positive.
4. En déduire que f admet en m un minimum global à déterminer.
5. f admet-elle un maximum local ? global ?

Exercice 13
Recherche d'extrema
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad f(x,y,z) = x^2+y^2+3z^2-xy-x-y-6z+5$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et que f admet un unique point critique.
2. Montrer que f admet un minimum local en ce point.

Exercice 14
D'après Ecricome 2008
On note $\forall (x_1,x_2,x_3) \in]0,+\infty[^3, f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{1}{4x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \dfrac{1}{9x_3}$.

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0,+\infty[^3$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
2. La fonction f admet-elle des extrema sur $]0,+\infty[^3$?
3. On note $\nabla^2(f)(a)$ la hessienne en un point $a = (a_1,a_2,a_3)$. On note q_a la forme quadratique associée à cette matrice. Montrer que cette forme quadratique est strictement positive.
4. Montrer que f admet un unique point critique B sous la contrainte $x_1+x_2+x_3 = 110$.

Exercice 15
On considère la fonction f définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x,y) = x^2+xy+y^2+2x+3y-1$, on considère $a = (1,1)$, $h = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(a+th)$.

1. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $g'(0)$.

Exercice 16
Recherche d'extrema sous contrainte

On note $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = 3x^2-2y^2-z^2$.

Déterminer les extrema locaux éventuels de f sous les contraintes suivantes :

1. $x-y+z = 7$
2. $\begin{cases} x-y+z = 3 \\ x+y+3z = 1 \end{cases}$

Exercice 17
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f : (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x^2\,y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Soit D l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

1. Justifier que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur D et déterminer son gradient en tout point de D.
   (b) Expliciter le développement limité à l'ordre 1 de f au point $a = (1,1)$.
   (c) Déterminer les extrema locaux et globaux de f sur D, s'il y en a.
3. Déterminer les extrema de f sur l'ensemble $\mathcal{C} = \left\{(x,y) \in D\,, x^2+y^2 = 2\right\}$.
4. La fonction f admet elle des extrema sur l'ensemble $\mathcal{B} = \left\{(x,y) \in D\,, x^2+y^2 \leq 2\right\}$?
5. Vérifier à l'aide du développement limité de f à l'ordre 1 que le point $a = (1,1)$ n'est pas un maximum local de f sur D.

Exercice 18
Droite de régression, problème des moindres carrés
Etant données deux séries statistiques fixées $x = (x_1,\cdots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1,\cdots,y_n) \in \mathbb{R}^n$, on considère la fonction définie par :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad f(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

et on cherche les valeurs de a et b pour lesquelles cette somme est minimale. LA droite soit minimale.
Nous avons déjà montré à la fin du cours d'algèbre bilinéaire que le couple (a,b) existe et est unique. On se propose ici de calculer les valeurs de a et b.

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Calculer le gradient de f.
2. On note
   $$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \quad V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\overline{x})^2, \quad Cov(x,y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}.\overline{y}$$
   qui désignent respectivement les moyennes empiriques de x et de y, la variance empirique de x et la covariance empirique de x et y.
3. Montrer que si (a,b) est un point critique de f, alors :
   $$\begin{cases} b = a.\overline{y} - a\overline{x} \\ a = \frac{Cov(x,y)}{V(x)} \end{cases}$$
4. Conclure

Exercice 19
Edhec 2018

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On note I_n la matrice identité de $M_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments valent 1.

1. (a) Déterminer le rang de J_n. En déduire que 0 est valeur propre de J_n et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

   (b) Vérifier que le vecteur V_n élément de $M_{n,1}(\mathbb{R})$, dont toutes les composantes sont égales à 1, est vecteur propre de J_n.

   (c) À l'aide des questions précédentes, donner les valeurs propres de J_n.

   Dans toute la suite, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ f_n(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right).$$

2. Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

3. (a) Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a : $\partial_i(f_n)(x) = \left(1 - 2x_i \sum_{k=1}^{n} x_k\right) \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)$.

   (b) En déduire que f_n possède deux points critiques $a = \dfrac{1}{\sqrt{2n}}(1, 1, \dots, 1)$ et $b = -a$.

4. (a) Déterminer les dérivées partielles d'ordre 2 de f_n.

   (b) Vérifier que la hessienne de f_n en a est $H_n(a) = \dfrac{-2}{\sqrt{2ne}}(nI_n + J_n)$.

   (c) À l'aide de la première question, donner les valeurs propres de $H_n(a)$.

   (d) En déduire que la fonction f_n possède un extremum local en a.

   (e) Sans refaire tous les calculs, donner une conclusion concernant le point critique b.

5. (a) Dresser le tableau variation de la fonction h qui, à tout t de $\mathbb{R}_+$, associe $h(t) = te^{-t^2}$.

   (b) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz à deux vecteurs bien choisis de $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire canonique, montrer que :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n \sum_{k=1}^{n} x_k^2.$$

   (c) Déduire des deux questions précédentes que f_n admet en a et en b des extrema globaux.

6. Question d'informatique.

   (a) Écrire des commandes `Scilab` permettant de calculer et d'afficher $H_n(a)$ pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

   (b) Dans le cas $n = 2$, la nappe suivante est-elle acceptable en tant que représentation graphique de la fonction f_2 ? Justifier.