DS n° 6 - Lundi 3 février 2025

Problème 1 : pseudo-inverse d'un endomorphisme symétrique

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2, et E est un espace euclidien de dimension n dont le produit scalaire est noté $\langle .,. \rangle$ et la norme associée est notée $\|.\|$. On note id_E l'application identique de E, et $\tilde{0}$ l'application nulle de E.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on note $F^{\perp}$ le sous-espace vectoriel supplémentaire orthogonal de F dans E.

Le projecteur de E sur F parallèlement à $F^{\perp}$ est appelé projecteur orthogonal sur F.

Pour tout endomorphisme f de E et toute valeur propre λ de f, on note $E_f(\lambda)$ le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ.

Partie I. Inverse généralisé d'un endomorphisme symétrique

On considère un endomorphisme symétrique f de E, c'est-à-dire un endomorphisme f tel que :

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$$

On suppose de plus que f est non bijectif et non nul.

1. Montrer que 0 est valeur propre de f et que f admet au moins une valeur propre non nulle.

2. (a) Soient λ et μ deux valeurs propres de f.
   Montrer, pour tout vecteur x de $E_f(\lambda)$ et pour tout vecteur y de $E_f(\mu)$:

   $$\lambda \langle x, y \rangle = \mu \langle x, y \rangle$$

   (b) En déduire que les sous-espaces propres de f sont deux à deux orthogonaux.

3. Montrer que les sous-espaces vectoriels $Im(f)$ et $Ker(f)$ sont supplémentaires orthogonaux dans E.

On suppose que f admet exactement $k+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ avec $k \geq 1$, $\lambda_0 = 0$ et $0 < |\lambda_1| \leq \cdots \leq |\lambda_k|$.

Pour tout entier naturel j inférieur ou égal à k, on note p_j le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_j)$.

4. Soit x un vecteur de E.

   (a) Montrer que :
   il existe un unique $(k+1)$-uplet $(x_0, x_1 \dots, x_k)$ de $E_f(0) \times E_f(\lambda_1) \times \cdots \times E_f(\lambda_k)$ tel que $x = x_0 + x_1 + \cdots + x_k$.

   (b) Pour tout entier naturel j inférieur ou égal à k, montrer : $p_j(x) = x_j$.

Ainsi, la relation suivante est clairement vérifiée :

$$id_E = p_0 + p_1 + \cdots + p_k$$

5. (a) Etablir, pour tout couple (i,j) d'entiers naturels inférieurs ou égaux à k :

$$i \neq j \Longrightarrow p_i \circ p_j = \tilde{0}$$

(b) Montrer : $\quad f = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \cdots + \lambda_k p_k.$

(c) Montrer que le projecteur orthogonal p sur $Im(f)$ vérifie : $p = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$

On note $f^\sharp$ l'endomorphisme de E défini par $f^\sharp = \dfrac{1}{\lambda_1} p_1 + \dfrac{1}{\lambda_2} p_2 + \cdots + \dfrac{1}{\lambda_k} p_k.$

On dit que $f^\sharp$ est l'inverse généralisé de f.

6. (a) Montrer : $\quad f \circ f^\sharp = p.$

(b) En déduire : $\quad \forall (x,y) \in E^2, \ \Big(f(x) = p(y) \Longleftrightarrow x - f^\sharp(y) \in \ker f \Big)$.

7. Soit y un vecteur de E.

(a) Montrer : $\quad \forall x \in E, \ \Big(\|f(x) - y\| = \inf\limits_{z \in E} \|f(z) - y\| \Longleftrightarrow x - f^\sharp(y) \in \ker f \Big)$

(b) En déduire que $f^\sharp(y)$ est le vecteur x de E de plus petite norme vérifiant :

$$\|f(x) - y\| = \inf_{z \in E} \|f(z) - y\|$$

Partie II. Application à un exemple

Dans cette question, on considère $E = \mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire canonique et de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ qui est une base orthonormale de $\mathbb{R}^4$. On note :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à la matrice A.

8. (a) Calculer le rang de A et le rang de $A - 2I$. En déduire deux valeurs propres de A ainsi que les dimensions de leurs sous-espaces propres associés.

(b) Justifier que la matrice A est diagonalisable. En utilisant la question précédente ainsi que la trace de la matrice A, montrer que A admet exactement trois valeurs propres distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$, que vous calculerez.

(c) Justifier que f est un endomorphisme symétrique non nul et non bijectif.
f admet alors les trois valeurs propres distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ avec $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2$ définies ci-dessus.

On note p_1 le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_1)$ et M_1 la matrice associée à p_1 relativement à la base $\mathcal{B}$.

On note p_2 le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_2)$ et M_2 la matrice associée à p_2 relativement à la base $\mathcal{B}$.

9. Montrer à l'aide de la partie I. que $A = 2M_1 + 4M_2$.

10. (a) Justifier que $E_f(\lambda_2)$ est de dimension 1 et déterminer un vecteur v_2 tel que (v_2) soit une base orthonormée de $E_f(\lambda_2)$.
    (b) Montrer : $\forall x \in E, \quad p_2(x) = \langle x, v_2 \rangle . v_2$.
    (c) Déterminer la matrice M_2.

11. En déduire la matrice associée à $f^\sharp$ relativement à la base $\mathcal{B}$.

Problème 2 : calcul intégral et loi logistique standard

La Partie III. est largement indépendante des Parties I. et II.

Partie I. Étude d'une fonction définie par la somme d'une série

On s'intéresse dans cette partie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, à la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Justifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}^-$, la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ diverge.

2. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$.

   (a) Montrer que les suites $(u_{2p})_{p \in \mathbb{N}^*}$ et $(u_{2p-1})_{p \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes, puis en déduire qu'elles convergent vers une même limite notée $S(x)$.

   (b) Justifier alors que la série $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge et que l'on a : $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

   (c) Justifier : $\quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad u_{2p} \leqslant S(x) \leqslant u_{2p+1} \leqslant u_{2p-1}$.

   (d) En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |S(x) - u_n| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^x}$.

   On pourra séparer les cas n pair et n impair.

   (e) Python : en déduire une fonction Python intitulée `def S(x,eps):` qui, étant donnés deux réels $x > 0$ et $\varepsilon > 0$ (noté `eps`), renvoie une valeur approchée de $S(x)$ à ε près.

3. Soient $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x} \quad \text{puis :} \quad \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}} \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}.$$

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, en utilisant la question **3.** : $\quad v_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

   (b) En déduire la convergence et la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, puis la valeur de $S(1)$.

5. On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Déterminer la valeur de $S(2)$.

Partie II. Étude d'une fonction définie par une intégrale

On rappelle que la fonction Γ est définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, rappeler la valeur de $\Gamma(n)$ (aucune justification n'est attendue).

7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t} \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > -1$.

On pose, pour tout réel x de $]-1;+\infty[$, $I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t} \mathrm{d}t$.

8. Soit $x \in]-1;+\infty[$. On définit la fonction $g_x :]0;+\infty[$, $t \mapsto \frac{t^x}{1+e^t}$.

   (a) Montrer : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ g_x(t) = (-1)^n g_x(t) e^{-nt} + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} t^x e^{-kt}$.

   (b) Justifier, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^x e^{-kt} \mathrm{d}t$ converge et que l'on a

$$\int_0^{+\infty} t^x e^{-kt} \mathrm{d}t = \frac{1}{k^{x+1}} \Gamma(x+1).$$

   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} g_x(t) e^{-nt} \mathrm{d}t$ converge, puis que la limite de $\int_0^{+\infty} g_x(t) e^{-nt} \mathrm{d}t$, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, est égale à 0.

   (d) En déduire la relation : $\quad I(x) = S(x+1)\Gamma(x+1)$,
   où la fonction S a été définie dans la partie **I**.

9. En utilisant la partie **I.**, déterminer la valeur de $I(1)$.

Partie III. Étude d'une variable aléatoire

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}$.

10. Vérifier que la fonction f est paire.

11. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

    On considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.
    On dit alors que $\underline{X \text{ suit la loi logistique standard}}$.

12. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction de répartition de X est donnée par

$$F_X(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$$

13. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n f(t)\mathrm{d}t$ converge.
    En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X^n admet une espérance.
    On note $m_n(X) = E(X^n)$.

    (b) Justifier que : $\quad \forall p \in \mathbb{N},\ m_{2p+1}(X) = 0$.

    (c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer :

$$\forall p \in \mathbb{N}^*,\ m_{2p}(X) = 4p.I(2p-1).$$

14. En déduire l'existence et la valeur de l'espérance et de la variance de X.

15. <u>Simulation Python</u>

    (a) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0,1[$ et $V = -\ln(\frac{1}{U}-1)$.
    Montrer que la variable V suit la même loi que X.

    (b) En déduire un programme Python permettant de simuler la variable X.
    Quel est le nom de la méthode utilisée pour cette simulation ?

16. On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mutuellement indépendantes et de même densité f.
    On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad Y_n = \max(X_1, ..., X_n) \quad$ et $\quad Z_n = Y_n - \ln(n)$.

    (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, déterminer la fonction de répartition de Y_n puis la fonction de répartition de Z_n.

    (b) En déduire que la suite $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité Z dont on précisera une densité .