Corrigé du DS n° 6

Problème 1 : pseudo-inverse d'un endomorphisme symétrique

Partie I. Inverse généralisé d'un endomorphisme symétrique

On considère un endomorphisme symétrique f de E. On suppose de plus que f est non inversible et non nul.

1. Puisque f est n'est pas bijective, 0 est une valeur propre de f.
   Supposons que f admette pur unique valeur propre 0. Alors, comme f est symétrique donc diagonalisable, on aurait $\bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} Ker(f - \lambda.Id) = Ker(f) = E$, et donc $f = 0_{\mathcal{L}(E)}$ ce qui est contraire à l'hypothèse.
   Donc f admet au moins une deuxième valeur propre non nulle.

2. (a) Soient λ et μ deux valeurs propres de f.
   Pour tout vecteur x de $E_f(\lambda)$ et pour tout vecteur y de $E_f(\mu)$:

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle = \langle x, \mu y\rangle = \mu\langle x, y\rangle.$$

   (b) Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de f, alors pour $x \in E_\lambda(f)$ et $y \in E_\mu(f)$, on a

$$\lambda\langle x, y\rangle = \mu\langle x, y\rangle \Leftrightarrow (\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = 0.$$

   Puisque $\lambda - \mu \neq 0$, il vient donc $\langle x, y\rangle = 0$.
   Et donc tout vecteur de $E_\lambda(f)$ est orthogonal à tout vecteur de $E_\mu(f)$, de sorte que $E_\lambda(f)$ et $E_\mu(f)$ sont orthogonaux.

3. Soit $x \in \operatorname{Ker} f$ et soit $y \in \operatorname{Im} f$. Alors $f(x) = 0_E$, et il existe $z \in E$ tel que $f(z) = y$.
   On a alors

$$\langle x, y\rangle = \langle x, f(z)\rangle = \langle f(x), z\rangle = \langle 0_E, z\rangle = 0$$

   Et donc $\operatorname{Ker} f \subset (\operatorname{Im} f)^\perp$.
   D'autre part, nous savons que

$$\dim(\operatorname{Im} f)^\perp = \dim E - \dim \operatorname{Im} f = \dim \operatorname{Ker} f.$$

   Et donc puisqu'on a une inclusion entre deux espaces de même dimension, il s'agit d'une égalité : $\operatorname{Ker} f = (\operatorname{Im} f)^\perp$.
   Et donc $\operatorname{Ker} f$ est le supplémentaire orthogonal de $\operatorname{Im} f$.

On suppose que f admet exactement $k+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$ avec $k \geq 1$, $\lambda_0 = 0$ et $0 < |\lambda_1| \leq \cdots \leq |\lambda_k|$.

Pour tout entier naturel j inférieur ou égal à k, on note p_j le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_j)$.

4. Soit x un vecteur de E.
   (a) Puisque f est diagonalisable, $E = \bigoplus_{i=0}^k E_{\lambda_i}(f)$.
   Et donc x, comme tout vecteur de E, s'écrit de manière unique

$$x = \sum_{i=0}^k x_i, \quad \text{où} \quad (x_0, x_1, \ldots, x_k) \in E_0(f) \times E_{\lambda_1}(f) \times \cdots \times E_{\lambda_k}(f).$$

   (b) Soit $j \in [[0, k]]$. D'après la question 2 , pour $i \neq j, E_{\lambda_i}(f)$ est orthogonal à $E_{\lambda_j}(f)$.
   Ce qui s'écrit encore $E_{\lambda_i}(f) \subset E_{\lambda_j}(f)^\perp = \operatorname{Ker} p_j$.
   Et donc

$$p_j(x) = \sum_{i=0}^k p_j(x_i) = p_j(x_j) + \sum_{\substack{i=0 \\ i\neq j}}^k \underbrace{p_j(x_i)}_{=0_E} = p_j(x_j) = x_j.$$

   Ainsi, la relation suivante est clairement vérifiée :

$$id_E = p_0 + p_1 + \cdots + p_k$$

5. (a) Soit $x \in E$, et reprenons les notations précédentes : $x = x_0 + \cdots + x_k$.
   Alors pour $i \neq j$, on a $p_j(x) = x_j \in E_{\lambda_j}(f) \subset E_{\lambda_i}(f)^\perp = \operatorname{Ker}(p_i)$.
   Et donc $p_i(p_j(x)) = 0_E$. Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on en déduit que

$$p_i \circ p_j = \tilde{0}$$

   (b) Avec les notations précédents, pour tout $x \in E$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^k f(x_i) \ \text{ par linéarité de } f \\ &= 0.x_0 + \sum_{i=1}^k \lambda_i.x_i \ \text{ puisque pour tout } i,\ x_i \in E_{\lambda i}(f) \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda_i.p_i(x) \end{aligned}$$

   Ceci étant vrai pour tout $x \in E$, on a bien

$$f = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \cdots + \lambda_k p_k$$

   (c) On sait déjà que $Im(p)$ et $Ker(p)$ sont des supplémentaires orthogonaux. Comme p_0 est le projecteur orthogonal sur $E_{\lambda_0}(f) = Ker(f)$, c'est le projecteur sur $Ker(f)$ parallèlement à $Im(f)$. Et p le projecteur orthogonal sur $Im(f)$ est le projecteur sur $Im(f)$ parallèlement à $Ker(f)$. On a donc

$$p + p_0 = Id \Leftrightarrow p = Id - p_0 \Leftrightarrow p = p_0 + p_1 + \cdots + p_k - p_0 = p_1 + p_2 + \cdots + p_k$$

On note $f^\sharp$ l'endomorphisme de E défini par $f^\sharp = \frac{1}{\lambda_1}p_1 + \frac{1}{\lambda_2}p_2 + \cdots + \frac{1}{\lambda_k}p_k$.

On dit que $f^\sharp$ est l'inverse généralisé de f.

6. (a) On a

$$\begin{aligned}
f\circ f^\sharp &= \left(\sum_{i=0}^k \lambda_i p_i\right)\circ\left(\sum_{j=1}^k \frac{1}{\lambda_j}p_j\right)\\
&= \sum_{i=0}^k\sum_{j=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda_j}p_i\circ p_j\\
&= \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda_i}p_i\circ p_i \text{ car si } i\neq j \text{ alors } p_i\circ p_j=0\\
&= \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{\lambda_i}p_i \text{ car } p_i \text{ est un projecteur}\\
&= p.
\end{aligned}$$

(b) Soient $x,y\in E$. Alors

$$f(x)=p(y)\Leftrightarrow f(x)-f\left(f^\sharp(y)\right)=0_E\Leftrightarrow f\left(x-f^\sharp(y)\right)=0_E\Leftrightarrow x-f^\sharp(y)\in\operatorname{Ker} f.$$

7. Soit y un vecteur de E.

(a) Lorsque z parcourt $E, f(z)$ parcourt $\operatorname{Im} f$. Et donc pour y fixé,

$$\inf_{z\in E}\|f(z)-y\|=\inf_{u\in\operatorname{Im} f}\|u-y\|.$$

Mais un théorème du cours nous garantit que cette borne inférieure est en réalité un minimum, atteint uniquement pour $u=p(y)$.
Et donc

$$\|f(x)-y\|=\inf_{z\in E}\|f(z)-y\|\Leftrightarrow f(x)=p(y)\Leftrightarrow x-f^\sharp(y)\in\operatorname{Ker} f$$

(b) Pour commencer, notons que

$$\left\|f\left(f^\sharp(y)\right)-y\right\|=\|p(y)-y\|=\min_{u\in\operatorname{Im} f}\|u-y\|=\inf_{z\in E}\|f(x)-y\|.$$

Il reste donc à montrer que si x est un autre vecteur vérifiant :
$\|f(x)-y\|=\inf_{z\in E}\|f(z)-y\|$, alors $\|x\|\geqslant\left\|f^\sharp(y)\right\|$.
Soit x un tel vecteur. D'après la question précédente, on a $x-f^\sharp(y)\in\operatorname{Ker} f$.
Et donc $x-f^\sharp(y)\in\operatorname{Ker} f$. Or, $f^\sharp(y)\in\operatorname{Im} f=(\operatorname{Ker} f)^\perp$.
Il vient alors, par le théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2=\|\underbrace{x-f^\sharp(y)}_{\in\operatorname{Ker} f}+\underbrace{f^\sharp(y)}_{\in(\operatorname{Ker} f)^\perp}\|^2=\left\|f^\sharp(y)\right\|^2+\left\|x-f^\sharp(y)\right\|^2.$$

Et donc $\|x\|\geqslant\left\|f^\sharp(y)\right\|$, avec égalité si et seulement si

$$\left\|x-f^\sharp(y)\right\|=0\Leftrightarrow x=f^\sharp(y).$$

Et donc $f^\sharp(y)$ est l'unique vecteur de norme minimale parmi ceux vérifiant
$\|f(x)-y\|=\inf_{z\in E}\|f(z)-y\|$.

Partie II. Application à un exemple

8. (a) On montre facilement que $rg(A)=3$ et $rg(A-2I)=2$. Par conséquent, 0 et 2 sont des valeurs propres de A. Par le théorème du rang matriciel, leurs sous-espaces propres associés sont de dimension $\dim(Ker(A))=1$ et $\dim(Ker(A-2I))=2$.

(b) La matrice A est symétrique, donc diagonalisable. On a donc $\sum_{\lambda\in Sp(A)}\dim(Ker(A-\lambda.I))=4$. Comme on a déjà $\dim(Ker(A))+\dim(Ker(A-2I))=3$, il ne reste qu'une autre valeur propre α, avec $\dim_{Ker(A-\alpha.I)}=1$. La matrice A étant diagonalisable, il existe une matrice inversible P telle que

$$A=P.Diag(0,2,2,\alpha).P^{-1}$$

Par propriété de la trace,

$$Tr(A)=Tr(P.Diag(0,2,2,\alpha).P^{-1})=Tr(P^{-1}.P.Diag(0,2,2,\alpha))=Tr(Diag(0,2,2,\alpha))=4+\alpha$$

Comme par ailleurs $Tr(A)=8$, on a $\alpha=4$.

<u>Bilan :</u> A est diagonalisable, et admet exactement trois valeurs propres distinctes $\lambda_0=0$, $\lambda_1=2$, $\lambda_2=4$.

(c) A est symétrique et la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est une BON de cet espace, donc l'endomorphisme f est symétrique. Comme $0\in Sp(A)=Sp(f)$, f n'est pas bijective.
Justifier que f est un endomorphisme symétrique non nul et non inversible.
f admet alors les trois valeurs propres distinctes $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2$ avec $\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2$ définies ci-dessus.

On note p_1 le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_1)$ et M_1 la matrice associée à p_1 relativement à la base $\mathcal{B}$.

On note p_2 le projecteur orthogonal sur $E_f(\lambda_2)$ et M_2 la matrice associée à p_2 relativement à la base $\mathcal{B}$.

9. D'après le I., $f=\lambda_1.p_1+\lambda_2.p_2$. D'où, en passant aux matrices, avec $\lambda_1=2$ et $\lambda_2=4$, Montrer à l'aide de la partie I. que $A=2M_1+4M_2$.

10. (a) Nous avons déjà vu que $\dim(Ker(A-4I)=1$, donc $\dim(E_f(\lambda_2))=1$. On remarque que

$$A.\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-1\\0\end{pmatrix}=4.\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Donc $w_2=(1,0,-1,0)$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 4. En normant ce vecteur, on obtient $v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}.(1,0,-1,0)$ qui est un vecteur normé appartenant à $E_f(\lambda_2)$. Comme $\dim(E_f(\lambda_2))=1$, la famille (v_2) soit une base orthonormée de $E_f(\lambda_2)$.

(b) D'après le cours, comme (v_2) est une BON de $E_f(\lambda_2)$, et que p_2 est la projection orthogonale sur ce s.e.v., $\forall x\in E,\quad p_2(x)=\langle x,v_2\rangle.v_2$.

(c) On a $p_2(e_1)=\langle e_1,v_2\rangle v_2=(\frac12,0,-\frac12,0), p_2(e_3)=\langle e_3,v_2\rangle v_2=(-\frac12,0,\frac12,0)$
et $p_2(e_2)=p_2(e_4)=0_E$.
Et donc

$$M_2=\left(\begin{array}{cccc|c} p_2(e_1) & p_2(e_2) & p_2(e_3) & p_2(e_4) & e_1\\ \frac12 & 0 & -\frac12 & 0 & e_2\\ 0&0&0&0 & e_3\\ -\frac12 & 0 & \frac12 & 0 & e_4\\ 0&0&0&0 & \end{array}\right).$$

11. On a $M_1 = \frac{1}{2}(A - 4M_2)$ et par conséquent,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\left(f^\sharp\right) = \frac{1}{2}M_1 + \frac{1}{4}M_2 = \frac{1}{4}A - \frac{3}{4}M_2 = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Problème 2 : calcul intégral et étude d'une variable aléatoire

Partie I. Étude d'une fonction définie par la somme d'une série

On s'intéresse dans cette partie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, à la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

1. Si $x = 0$, alors $\frac{(-1)^{n+1}}{n^x} = (-1)^{n+1}$ ne converge pas vers 0 .

   Et si $x < 0$, alors $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^x}\right| = n^{-x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Donc de même, on n'a pas $\frac{(-1)^{n+1}}{n^x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   Et alors, la série $\sum_{n\in\mathbf{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est grossièrement divergente.

2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}$.

   (a) On a, pour $p \in \mathbf{N}^*$,

   $$u_{2(p+1)} - u_{2p} = u_{2p+2} - u_{2p} = \sum_{k=1}^{2p+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} - \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \frac{1}{(2p+1)^x} - \frac{1}{(2p+2)^x}$$

   Mais la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^x}$ est décroissante sur $\mathbf{R}_+^*$, de sorte que $\frac{1}{(2p+1)^x} \geqslant \frac{1}{(2p+2)^x}$ et donc $u_{2p+2} - u_{2p} \geqslant 0$. Ainsi, la suite $(u_{2p})_{p\in\mathbf{N}^*}$ est croissante.

   De même, on a $u_{2(p+1)-1} - u_{2p-1} = u_{2p+1} - u_{2p-1} = \frac{1}{(2p+1)^x} - \frac{1}{(2p)^x} \leqslant 0$ et donc la suite $(u_{2p-1})_{p\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante.
   Enfin,

   $$u_{2p} - u_{2p-1} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} - \sum_{k=1}^{2p-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = -\frac{1}{(2p)^x} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

   Ainsi, les suites $(u_{2p})_{p\in\mathbf{N}^*}$ et $(u_{2p-1})_{p\in\mathbf{N}^*}$ sont adjacentes, et par conséquent convergent vers une même limite notée $S(x)$.

   (b) D'après le cours, puisque $\lim_{p\to+\infty} u_{2p} = \lim_{p\to+\infty} u_{2p+1} = S(x)$,

   on a aussi $\lim_{n\to+\infty} u_n = S(x)$. Ceci signifie que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge et que

   l'on a bien : $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$.

   (c) La suite $(u_{2p})_{p\in\mathbf{N}^*}$ étant croissante et convergente, chacun de ses termes est inférieur à la limite de la suite : $\forall p \in \mathbf{N}^*, u_{2p} \leqslant S(x)$.
   De même, par décroissance de $(u_{2p-1})_{p\in\mathbf{N}^*}$, on a : $\forall k \in \mathbf{N}^*, u_{2k-1} \geqslant S(x)$. En particulier, pour $k = p+1$, il vient $S(x) \leqslant u_{2p+1}$.

   Enfin, toujours par décroissance de $(u_{2p-1})_{p\in\mathbf{N}^*}, \forall p \in \mathbf{N}^*, u_{2p+1} \leqslant u_{2p-1}$.
   Ainsi,

   $$\forall p \in \mathbf{N}^*, u_{2p} \leqslant S(x) \leqslant u_{2p+1} \leqslant u_{2p-1}$$

   (d) • Si n est pair, $n = 2p$, alors

   $$0 \leqslant S(x) - u_{2p} \leqslant u_{2p+1} - u_{2p} \leqslant u_{n+1} - u_n \leqslant \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)^x} \leqslant \frac{1}{(n+1)^x}$$

   Et donc $|S(x) - u_n| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x}$.
   • Si n est impair, $n = 2p-1$, alors

   $$u_{2p} - u_{2p-1} \leqslant S(x) - u_{2p-1} \leqslant 0$$

   avec $u_{2p} - u_{2p-1} = \frac{(-1)^{2p+1}}{(2p)^x} = \frac{-1}{(n+1)^x}$.
   Et alors $|S(x) - u_n| = |S(x) - u_{2p-1}| \leqslant \frac{1}{(n+1)^x}$.

   (e) Etant donné $\epsilon > 0$, dès que $\frac{1}{(n+1)^x} \leq \epsilon$, on est sûrs d'avoir $|S(x) - u_n| \leq \epsilon$, et par conséquent u_n est une valeur approchée de $S(x)$ à ϵ près. D'où le programme ci-dessous.

```
def S(x,eps) :
   k=0
   u=0
   while 1/(k+1)**x>eps :
      k=k+1
      u=u+(-1)**(k+1)*1/k**x
   return u
```

3. Soient $x \in \mathbb{R}^{++}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer :

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x} \quad \text{puis :} \quad \sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}.$$

En séparant les termes pairs des termes impairs, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} &= \sum_{n=1}^{p} \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n)^x} + \sum_{n=1}^{p} \frac{(-1)^{2n-1+1}}{(2n-1)^x} \\ &= \sum_{n=1}^{p} \frac{(-1)}{2^x n^x} + \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{(2n-1)^x} \\ &= \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{(2n-1)^x} - \frac{1}{2^x}\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^x} = \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} - \frac{1}{2^x}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}.\end{aligned}$$

De même, on a

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} = \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{(2n)^x} + \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{(2n-1)^x} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{(2k-1)^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^x}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}.$$

Et donc, en remplaçant dans l'égalité précédemment obtenue, il vient

$$\sum_{k=1}^{2p} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{2}{2^x}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x} = \sum_{k=1}^{2p} \frac{1}{k^x} - \frac{1}{2^{x-1}}\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k^x}$$

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

(a) Dans la question 3 , si l'on prend $x=1$, il vient

$$v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Soit encore, $v_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+i}$.
En factorisant le dénominateur par n, on obtient donc $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$.

(b) Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Alors f est continue, et on a

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

On reconnait alors des sommes de Riemann de f entre 0 et 1 , de sorte que (v_n) converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 f(t)dt = [\ln(1+t)]_0^1 = \ln(2)$$

D'autre part, $\lim_{n\to+\infty} v_n = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = S(1)$ et donc $S(1) = \ln(2)$.

5. En faisant tendre p vers $+\infty$ dans l'inégalité de la question 3 , on obtient

$$S(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

PARTIE II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On rappelle que la fonction Γ est définie sur $]0;+\infty[$ par : $\quad \forall x \in]0;+\infty[,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$

6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$

7. La fonction $t \mapsto \frac{t^x}{1+e^t}$ est continue sur $]0;+\infty[$, et donc il faut étudier la nature de l'intégrale en 0 et en $+\infty$.
Au voisinage de $+\infty$, on a $t^2\frac{t^x}{1+e^t} \underset{t\to+\infty}{\sim} t^{x+2}e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, $\frac{t^x}{1+e^t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et donc, par comparaison à une intégrale de Riemann convergente, $\int_1^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t}dt$ converge, quelle que soit la valeur de x.
Au voisinage de 0 , on a $\frac{t^x}{1+e^t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t^x}{1+e^0} = \frac{t^x}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{t^{-x}}$.
Par critère de comparaison pour les intégrales de fonctions positives, les intégrales $\int_0^1 \frac{t^x}{1+e^t}dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{t^{-x}}dt$ sont de même nature.
Or cette dernière intégrale est une intégrale de Riemann, qui converge si et seulement si $-x < 1 \Leftrightarrow x > -1$.
Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t}dt$ converge si et seulement si $x > -1$.

On pose, pour tout réel x de $]-1;+\infty[, I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^x}{1+e^t}\mathrm{d}t.$

8. Soit $x \in]-1;+\infty[$. On définit la fonction $g_x :]0;+\infty[,\ t \mapsto \dfrac{t^x}{1+e^t}$.

(a) En utilisant la formule de sommation des premiers termes d'une suite géométrique, il vient

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}t^xe^{-kt} &= t^x\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^ie^{-(i+1)t} \\ &= t^xe^{-t}\sum_{i=0}^{n-1}\left(-e^{-t}\right)^i \\ &= t^xe^{-t}\frac{1-(-1)^ne^{-nt}}{1+e^{-t}} = t^x\frac{1-(-1)^ne^{-nt}}{1+e^t} \\ &= g_x(t)\left(1-(-1)^ne^{-nt}\right).\end{aligned}$$

Et donc

$$g_x(t) = (-1)^n g_x(t)e^{-nt} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}e^{-kt}$$

(b) Procédons au changement de variable $u = kt$, qui est légitime car il s'agit d'un changement de variable affine. Alors, $\int_0^{+\infty} t^xe^{-kt}dt$ et $\int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{k}\right)^x e^{-u}\frac{du}{k}$ sont de même nature, et en cas de convergence sont égales.
Or, la seconde intégrale est convergente et

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{k}\right)^x e^{-u}\frac{du}{k} = \frac{1}{k^{x+1}}\int_0^{+\infty}u^xe^{-u}dt = \frac{1}{k^{x+1}}\Gamma(x+1)$$

On en déduit que $\int_0^{+\infty} t^xe^{-kt}dt$ converge et vaut $\frac{1}{k^{x+1}}\Gamma(x+1)$.

(c) Pour tout $t > 0$, on a $0 \leqslant g_x(t)e^{-nt} \leqslant t^xe^{-nt}$.
Puisque $\int_0^{+\infty} t^xe^{-nt}dt$ converge par la question précédente, $\int_0^{+\infty} g_x(t)e^{-nt}dt$ converge.
Par croissance de l'intégrale, il vient alors

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} g_x(t)e^{-nt}dt \leqslant \int_0^{+\infty} t^xe^{-nt}dt = \frac{1}{n^{x+1}}\Gamma(x+1)$$

Mais $x > -1$, de sorte que $x+1 > 0$ et donc $\frac{1}{n^{x+1}}\Gamma(x+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Par le théorème des gendarmes, on a donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} g_x(t)e^{-nt}dt = 0$$

(d) En intégrant la relation obtenue en 7.a, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} g_x(t)e^{-nt}dt &= \int_0^{+\infty} g_x(t)e^{-nt}dt + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\int_0^{+\infty} t^xe^{-kt}dt \\ &= \int_0^{+\infty} g_x(t)e^{-nt}dt + \Gamma(x+1)\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^{x+1}}\end{aligned}$$

Lorsque $n \to +\infty$, il vient alors

$$I(x) = \int_0^{+\infty} g_x(t)dt = 0 + \Gamma(x+1)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^{x+1}} = \Gamma(x+1)S(x+1)$$

9. On a $I(1) = S(2)\Gamma(2) = S(2) = \frac{\pi^2}{12}$.

PARTIE III : Étude d'une variable aléatoire

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{e^t}{(1+e^t)^2}$.

10. Soit $t \in \mathbf{R}$. Alors

$$f(-t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} = \frac{e^{-2t}}{e^{-2t}} \frac{e^t}{e^{2t}(1+e^{-t})^2} = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} = f(t)$$

Donc f est une fonction paire.

11. La fonction f est continue sur $\mathbf{R}$ car quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
Et elle clairement positive car son numérateur et son dénominateur le sont.
Pour $A > 0$, on a

$$\int_0^A \frac{e^t}{(1+e^t)^2} dt = \left[-\frac{1}{1+e^t}\right]_0^A = \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$$

Donc $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et vaut $\frac{1}{2}$. On en déduit, par parité de f que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2\int_0^{+\infty} f(t)dt = 1$$

Ainsi, f est une densité de probabilités.

On considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

12. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned} F_X(x) = P(X \leqslant x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt &= \int_{-\infty}^0 f(t)dt + \int_0^x f(t)dt \\ &= \frac{1}{2} + \left[-\frac{1}{1+e^t}\right]_0^x = 1 - \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^{-x}}. \end{aligned}$$

13. (a) La fonction $t \mapsto t^n f(t)$ est continue sur $[\,0, +\infty\,[$, donc le seul éventuel problème de convergence est au voisinage de $+\infty$.
Or, on a $t^n f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} t^n \frac{e^t}{e^{2t}} = t^n e^{-t}$.
Puisque l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$ converge (fonction Gamma), par critère de comparaison pour les fonctions positives, on en déduit que $\int_0^{+\infty} t^n f(t)dt$ converge.
Par le théorème de transfert, X admet un moment d'ordre n si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)dt$ converge.
Mais la fonction $t \mapsto t^n f(t)$ est soit paire, soit impaire, suivant la parité de n.
Dans les deux cas, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)dt$ converge si et seulement $\int_0^{+\infty} t^n f(t)dt$ converge, ce qui est bien le cas.
Et donc X admet un moment d'ordre n.

(b) La fonction $t \mapsto t^{2p+1} f(t)$ est impaire, et d'intégrale convergente d'après la question précédente, donc

$$m_{2p+1}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p+1} f(t)dt = 0$$

(c) La fonction $t \mapsto t^{2p} f(t)$ est paire et d'intégrale convergente, de sorte que

$$m_{2p}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^{2p} f(t)dt = 2\int_0^{+\infty} t^{2p} f(t)dt = 2\int_0^{+\infty} \frac{t^{2p}e^t}{(1+e^t)^2} dt$$

Soit $A > 0$. Alors, en posant $u(t) = t^{2p}$ et $v(t) = -\frac{1}{1+e^t}$, qui sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[0, A]$, on a

$$\begin{aligned} \int_0^A \frac{t^{2p}e^t}{(1+e^t)^2} dt &= \left[-\frac{t^{2p}}{1+e^t}\right]_0^A + 2p\int_0^A \frac{t^{2p-1}}{1+e^t} dt \\ &= -\frac{A^{2p}}{1+e^A} + 2p\int_0^A \frac{t^{2p-1}}{1+e^t} dt \\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 2pI(2p-1). \end{aligned}$$

On en déduit donc que $m_{2p}(X) = 2 \times 2pI(2p-1) = 4pI(2p-1)$.

14. Puisque X admet un moment d'ordre 2, elle admet une variance et donc une espérance.
Alors $E(X) = m_1(X) = 0$ d'après 12.b.
Par la formule de Huygens, on a donc

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = m_2(X) = 4I(1) = \frac{\pi^2}{3}$$

15. (a) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0,1[)$ et $V = -\ln(\frac{1}{U} - 1)$. On voit de proche en proche que $V(\Omega) = \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} F_V(x) &= P(-\ln(\frac{1}{U} - 1) \leq x) = P(\ln(\frac{1}{U} - 1) \geq -x) \\ &= P(\frac{1}{U} - 1 \geq e^{-x}) \text{ par stricte croissance de la fonction exp sur } \mathbb{R} \\ &= P(\frac{1}{U} \geq 1 + e^{-x}) \\ &= P(U \leq \frac{1}{1+e^{-x}}) \text{ par stricte décroissance de la fonction inverse sur }]0; +\infty[\\ &= F_U(\frac{1}{1+e^{-x}}) \\ &= \frac{1}{1+e^{-x}} \text{ car } \frac{1}{1+e^{-x}} \in [0,1] \\ &= F_X(x) \end{aligned}$$

<u>Bilan :</u> $\boxed{V \text{ suit la même loi que } X}$

(b)
```
def X():
    U=rd.random()
    V=-np.log(1/U-1)
    return V
```
Nous avons une fois de plus utilisé la fameuse <u>méthode d'inversion</u>.

16. On considère une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ mutuellement indépendantes et de même densité f.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad Y_n = \max(X_1, ..., X_n) \quad$ et $\quad Z_n = Y_n - \ln(n)$.

(a) $Y_n(\Omega) = \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbf{R}$. Alors

$$[Y_n \leqslant x] = \bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]$$

de sorte que, par indépendance des X_i,

$$P(Y_n \leqslant x) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} [X_i \leqslant x]\right) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leqslant x) = \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^n.$$

Et donc

$$F_{Z_n}(x) = P(Y_n - \ln(n) \leqslant x) = P(Y_n \leqslant x + \ln(n)) = \frac{1}{\left(1+e^{-x-\ln(n)}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right)^n}$$

(b) Soit $x \in \mathbf{R}$ fixé. Alors

$$F_{Z_n}(x) = \exp\left(-n\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right)\right)$$

Lorsque $n \to +\infty$, $\frac{e^{-x}}{n} \to 0$ et donc

$$\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-x}}{n} \Rightarrow -n\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -n\frac{e^{-x}}{n} = -e^{-x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -e^{-x}$$

Par continuité de l'exponentielle, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = e^{-e^{-x}}$$

Notons F la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $F(x) = e^{-e^{-x}}$.
F est évidemment de classe $\mathscr{C}^1$, et elle est croissante sur $\mathbf{R}$ car composée de la fonction $t \mapsto e^{-t}$, qui est décroissante, par elle-même.
De plus, on a $\lim_{x\to-\infty} F(x) = \lim_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{t\to 0} e^{-t} = 1$.
Ainsi, F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire. Puisque F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}$, cette variable aléatoire est à densité, et une densité en est donnée par $g(x) = F'(x) = e^{-x}e^{-e^{-x}}$. Soit donc Z une variable aléatoire de densité g. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, c'est-à-dire en tout point de continuité de $F_Z = F$, on a $\lim_{n\to+\infty} F_{Z_n}(x) = F(x) = F_Z(x)$, ce qui, par définition de la convergence en loi, signifie que $Z_n \xrightarrow{\mathscr{L}} Z$. d'une variable à densité, il faut, comme d'habitude montrer que F est continue sur $\mathbf{R}$ et $\mathscr{C}^1$ sauf en un nombre fini $\langle$ de points.

Cette variable Z suit la loi de Gumbel, que nous avons déjà croisé en TD.