Programme de colle - **Semaine 18**
du 17 au 21 février 2025

Python

TOUT !!
En particulier :
Simulation de lois usuelles discrètes et à densité : uniforme, binômiale, Bernoulli, géométrique, Poisson. Méthode d'inversion (guidé) pour simuler une variable à densité. Retour sur les matrices en Python : toutes les instructions au programme, notamment `np.shape(A)` qui renvoie la taille de la matrice A. Sommes de colonnes (ou de lignes) d'une matrice. Utilisation de booléens (vrai/faux). Estimateurs, méthode de Monte-Carlo.
Objectif : faire le plein de points en Python !!

Chapitre 12 - Estimation

1. **Vocabulaire :** notion d'échantillon i.i.d. (indépendant, identiquement distribué) $(X_1, \cdots, X_n)$ de même loi qu'une variable X donné.

   On considère une variable X dont la loi dépend d'un réel θ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
2. Définition d'un estimateur $T_n = \varphi(X_1, \cdots, X_n)$ de $g(\theta)$.
3. Un estimateur T_n de $g(\theta)$ est **sans biais** si $E(T_n) = g(\theta)$.
4. Un estimateur T_n de $g(\theta)$ est **convergent** si $T_n \xrightarrow{P} g(\theta)$.
5. Si $T_n \xrightarrow{P} g(\theta)$ et f est une fonction continue alors $f(T_n) \xrightarrow{P} f(g(\theta))$.
6. La moyenne empirique $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ est un estimateur sans biais et convergent de $m = E(X)$.
7. **condition suffisante de convergence :** si $\lim_{n\to+\infty} E(T_n) = g(\theta)$ et si $\lim_{n\to+\infty} V(T_n) = 0$ alors $T_n \xrightarrow{P} g(\theta)$ (T_n est un estimateur convergent de $g(\theta)$).
8. comparaison de deux estimateurs : si l'on dispose de plusieurs estimateurs de $g(\theta)$, le plus intéressant est celui pour lequel la quantité $V(T_n) + (E(T_n) - g(\theta))^2$ est la plus faible.
9. **Intervalle de confiance**

   Définitions : **intervalle de confiance, intervalle de confiance asymptotique**.
   Nous avons vu différents exemples.
   Retenir pour la construction d'un intervalle de confiance pour la **loi de Bernoulli** :
   pour tout $p \in [0,1]$, $p(1-p) \leq \frac{1}{4}$ (via une étude de variations rapide).
   Ingrédients pour la construction d'un intervalle de confiance : Markov, IBT, lois usuelles (dont loi normale !!), TCL...
10. **Méthode de Monte Carlo :** méthode pour estimer l'espérance $m = E(Y)$ d'une variable aléatoire Y ou une certaine probabilité.
    Application à différents calculs approchés d'intégrales, de séries, de sommes finies.
    Le plus souvent $Y = g(X)$ où X suit une loi usuelle discrète (estimation de somme ou de série) ou à densité (estimation d'une intégrale) que l'on peut simuler sur Python et g est une fonction bien choisie.
    On estime alors l'espérance m par la moyenne empirique $\overline{Y_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k$.

Exercice de cours à savoir refaire
Soit $M = \displaystyle\int_0^1 \frac{4}{1+t^2}dt$.

(a) Ecrire M comme l'espérance d'une variable aléatoire Y.
(b) Ecrire un programme Python, qui définit la fonction g où $g(t) = \frac{4}{1+t^2}$ puis qui affiche une estimation de M par la méthode de Monte-Carlo pour un échantillon de taille n.
(c) Calculer la valeur exacte de M. Objectif du programme précédent ?

Chapitre 13 - Formes quadratiques

- Forme quadratique associée à une matrice symétrique A : définition.
- **Théorème** :
  - $Spec(A) \subset [0;+\infty[\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n$, $q_A(x) \geq 0$ (q_A est positive).
  - $Spec(A) \subset]0;+\infty[\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $q_A(x) > 0$ (q_A est définie positive).
  - $Spec(A) \subset]-\infty,0] \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n$, $q_A(x) \leq 0$ (q_A est négative).
  - $Spec(A) \subset]-\infty,0[\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $q_A(x) < 0$ (q_A est définie négative).
  - Si A possède une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative alors q_A change de signe.

  Preuve à comprendre car très classique !
- Méthodes pour étudier le signe d'une forme quadratique :
  1. Tester quelques valeurs. Si on obtient une valeur > 0 et une valeur < 0 alors q_A change de signe!
  2. Ecrire q_A comme une somme/différence de carrés. On essaie d'"épuiser une inconnue" en faisant apparaître tous les termes correspondants dans un premier carré, puis on recommence.
  3. On calcule $Spec(A)$ et on applique le Théorème. Il faut d'abord calculer $Spec(A)$ (plus long !)

BIENTOT LA FIN !!!
Plus qu'une quinzaine de colle et les fonctions de plusieurs variables !