Chapitre 15 - Fonctions de n variables II

Nous utilisons les mêmes conventions que dans le chapitre précédent.

Remarque
Soit a un point critique de f. Comme $\nabla f(a) = 0$, le DL1 de f en a est

$$f(a+h) = f(a) + \|h\| .\epsilon(h)$$

où $\epsilon(0, \cdots, 0) = 0$ et ϵ continue en 0.

Ce DL1 ne donne pas le signe de $f(a+h) - f(a)$, donc ne permet pas d'étudier si f admet un extremum local en a.
Des techniques plus fines s'imposent.

I. Dérivées partielles d'ordre 2

I.1) Définitions

Définition I.1
Soit $n \geq 2$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$.

1. Soit $(i,j) \in [[1,n]]^2$. Si f admet en tout point de Ω une dérivée partielle par rapport à la variable x_j et si l'application $\partial_j(f) : \Omega \to \mathbb{R}$ admet une dérivée partielle en a par rapport à la variable x_i, cette dérivée partielle est notée $\partial^2_{i,j}(f)(a)$:

   $$\partial^2_{i,j}(f)(a) = \partial_i(\partial_j(f))(a)$$

   On dit que f admet en a une dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à x_j puis à x_i.

   Si en tout point $a \in \Omega$, $\partial^2_{i,j}(f)(a)$ existe, la fonction $\partial^2_{i,j}(f) : \Omega \to \mathbb{R}$ est la fonction dérivée partielle d'ordre 2 par rapport à x_j puis x_i.

2. Si pour tout $(i,j) \in [[1,n]]^2$, f admet une dérivée partielle d'ordre 2 en a par rapport à x_j puis à x_i, on appelle **matrice hessienne** de f en a la matrice notée

   $$\nabla^2 f(a) = H = (h_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ \text{ où}$$

   $$\forall (i,j) \in [[1,n]]^2, \ \ h_{i,j} = \partial^2_{i,j}(f)(a) \quad \text{et} \quad \nabla^2 f(a) = \begin{pmatrix} \partial^2_{1,1}(f)(a) & \cdots & \partial^2_{1,n}(f)(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial^2_{n,1}(f)(a) & \cdots & \partial^2_{n,n}(f)(a) \end{pmatrix}$$

Remarque
Anciennes notations utilisées dans les annales, et courantes en économie :

$$\partial^2_{i,j}(f)(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \ \text{ et pour } \ \ i = j, \ \partial^2_{i,i}(f)(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$$

Exemple
Soit f où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, avec $f(x,y) = x^3 + x.e^y$.
Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f en tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
En déduire la matrice hessienne de f en (x,y), puis en $a = (1,0)$.

Définition I.2
Soit $n \geq 2$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$.
Si pour tout $(i,j) \in [[1,n]]^2$, f admet sur Ω des dérivées partielles d'ordre 2, et si ces fonctions $\partial^2_{i,j}(f) : \Omega \to \mathbb{R}$ continues sur Ω, alors on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω.

I.2) Théorèmes généraux

Théorème I.1
Soit $n \geq 2$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $g : \Omega \to \mathbb{R}$.

1. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω alors $f+g$, $f.g$ et $\lambda.f$ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.
2. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω et si g ne s'annule pas sur Ω, alors $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

Théorème I.2
Soit $n \geq 2$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ à valeurs dans I intervalle de $\mathbb{R}$ ($f(\Omega) \subset I$), soit $G : I \to \mathbb{R}$.
Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω et si G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, alors $G \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.

Théorème I.3
Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction polynômiale alors f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.

I.3) Théorème de Schwarz (admis)

Théorème I.4
Soit $n \geq 2$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$.
Soit $(i,j) \in [[1,n]]^2$ avec $i \neq j$. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, alors

$$\boxed{\forall a \in \Omega, \ \partial^2_{i,j}(f)(a) = \partial^2_{j,i}(f)(a)}$$

et donc

$$\boxed{\text{la matrice hessienne } \nabla^2(f)(a) \text{ est symétrique}}.$$

Définition I.3
On note $q_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forme quadratique associée à la hessienne $\nabla^2(f)(a)$.

Donc pour tout $h = (h_1, \cdots, h_n)$, en notant $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ \cdots \\ h_n \end{pmatrix}$,

$$q_a(h) = {}^tH.\nabla^2(f)(a).H = \sum_{(i,j) \in [[1,n]]^2} \partial^2_{i,j}(f)(a).h_i.h_j$$

Remarque
Le théorème de Schwarz permet d'éviter de calculer certaines dérivées partielles et peut permettre de vérifier les calculs.

La forme quadratique q_a s'écrit aussi

$$q_a(h) = \sum_{i=1}^{n} \partial^2_{i,i}(f)(a).h_i^2 + 2.\sum_{1\leq i<j\leq n} \partial^2_{i,j}(f)(a).h_i.h_j$$

Proposition I.1
Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que si h a pour coordonnées h_1, ..., h_n dans $\mathcal{B}$, on a :

$$q_a(h) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i h_i^2$$

où λ_1, ..., λ_n sont les valeurs propres de A (comptées avec multiplicité).
(cf preuve de cours sur les formes quadratiques)

I.4) Développement limité d'ordre 2

Théorème I.5
Développement limité d'ordre 2 (admis)
Soit $n \geq 2$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω et $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \Omega$.
Notons $q_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forme quadratique associée à la hessienne $\nabla^2(f)(a)$.
Il existe une fonction $\epsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue en $(0, \cdots, 0)$ où $\epsilon(0, \cdots, 0) = 0$ telle que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $a + h \in \Omega$,

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + \langle \nabla(f)(a), h\rangle + \tfrac{1}{2}q_a(h) + \|h\|^2.\epsilon(h)}$$

soit aussi en notant $h = (h_1 \cdots, h_n)$,

$$\begin{aligned} f(a_1+h_1, \cdots, a_n+h_n) &= f(a_1, \cdots, a_n) + \sum_{k=1}^{n} \partial_k(f)(a_1, \cdots, a_n).h_k \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{(i,j)\in [[1,n]]^2} \partial^2_{i,j}(f)(a).h_i.h_j + (\sum_{k=1}^{n} h_k^2).\epsilon(h_1, \cdots, h_n) \end{aligned}$$

Remarque
- Faire le parallèle avec le DL d'ordre 2 d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, par la formule de Taylor-Young :
  $f(x+h) = f(x) + h.f'(x) + \frac{h^2}{2}.f''(x) + o(h^2)$.
- Le DL2 précise le DL1 en a. Si a est un point critique de f alors $\nabla(f)(a) = 0$ et donc

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2}q_a(h) + \|h\|^2.\epsilon(h)$$

  ce qui permet dans certains cas de voir si f possède un extremum local en ce point.

Exercice 1
Soit f où $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ où $f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} - y + z + x.y.z$.
1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f et les points critiques.
3. (a) Déterminer la hessienne $\nabla^2(f)(a)$, la forme quadratique q_a associée en $a = (1,1,1)$ et écrire le DL2 en a.
   (b) Déterminer la hessienne $\nabla^2(f)(b)$, la forme quadratique q_b associée en $b = (1,-1,1)$ et écrire le DL2 en a. Prouver que q_b ne garde pas un signe constant sur $\mathbb{R}^3$.

I.5) Dérivée seconde de $g(t) = f(x+th)$

Proposition I.2
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert Ω. Soit $x \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}^n$. On considère la fonction g définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ tel que $x + th \in \Omega$ par $g(t) = f(x+th)$. Alors g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur son domaine de définition et

$$g''(t) = q_{x+th}(h)$$

où q_{x+th} est la forme quadratique associée à la matrice hessienne $\nabla^2 f(x+th)$.
On a en particulier $g''(0) = q_x(h)$.

II. Extrema sur un ouvert : conditions du second ordre

Théorème II.1
Condition suffisante du second ordre pour un extremum local

Soit $n \geq 2$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω et $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \Omega$.
Notons $q_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forme quadratique associée à la hessienne $\nabla^2(f)(a)$.

- 1er cas : si $a \in \Omega$ est un point critique de f et $\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0, \cdots, 0\}$, $q_a(h) > 0$ (q_a est définie positive), alors f admet en a un minimum local.
- 2ème cas : si $a \in \Omega$ est un point critique de f et $\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0, \cdots, 0\}$, $q_a(h) < 0$ (q_a est définie négative), alors f admet en a un maximum local.
- 3ème cas : si $a \in \Omega$ est un point critique de f et $\exists h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0, \cdots, 0\}$; $q_a(h) < 0$ et $\exists k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0, \cdots, 0\}$; $q_a(k) > 0$ alors f n'admet pas d'extremum local en a.
  On dit que a est un **point col**.
- 4ème cas : cas "pathologiques"
  - si $a \in \Omega$ est un point critique de f, $\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0, \cdots, 0\}$, $q_a(h) \geq 0$ et $\exists k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0, \cdots, 0\}$, $q_a(k) = 0$,
  - si $a \in \Omega$ est un point critique de f, $\forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0, \cdots, 0\}$, $q_a(h) \leq 0$ et $\exists k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0, \cdots, 0\}$, $q_a(k) = 0$,

  alors dans l'un ou l'autre de ces deux cas, on ne peut pas conclure : l'étude de f en a nécessite d'autres moyens (par exemple le signe de $f(a+h) - f(a)$ ou le théorème ci-dessous).

Remarque
En pratique, pour étudier le signe de q_a : étude "à la main" via une écriture en combinaison linéaire de carrés, ou utiliser la hessienne et son spectre lorsque cela est accessible (cf chapitre sur les formes quadratiques).

Théorème II.2
Condition suffisante sur le spectre de la hessienne pour un extremum local

Soit $n \geq 2$, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω et $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \Omega$.
Notons $q_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la forme quadratique associée à la hessienne $\nabla^2(f)(a)$.

- 1er cas : si $a \in \Omega$ est un point critique de f et $Spec(\nabla^2 f(a)) \subset]0; +\infty[$, alors f admet en a un minimum local.
- 2ème cas : si $a \in \Omega$ est un point critique de f et $Spec(\nabla^2 f(a)) \subset]-\infty, 0[$, alors f admet en a un maximum local.
- 3ème cas : si $a \in \Omega$ est un point critique de f et $\nabla^2 f(a)$ admet deux valeurs propres non nulles et de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum local en a et a est un point col.
- 4ème cas : cas "pathologiques"
  - si $a \in \Omega$ est un point critique de f, $Spec(\nabla^2 f(a)) \subset [0, +\infty[$ et $0 \in Spec(\nabla^2 f(a))$
  - si $a \in \Omega$ est un point critique de f, $Spec(\nabla^2 f(a)) \subset]-\infty, 0]$ et $0 \in Spec(\nabla^2 f(a))$

  alors dans l'un ou l'autre de ces deux cas, on ne peut pas conclure : l'étude de f en a nécessite d'autres moyens.

Définition II.1
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que Ω est **convexe** lorsque $\forall (a, b) \in \Omega^2$, on a $[a, b] \subset \Omega$, où

$$[a, b] = \{ta + (1-t).b;\ t \in [0, 1]\}$$

autrement dit si $\forall (a, b) \in \Omega$, le segment $[a, b]$ est inclus dans Ω.

Théorème II.3
Condition suffisante sur le spectre de la hessienne pour un extremum global (admis)
Soit $n \geq 2$, Ω un **ouvert convexe** de $\mathbb{R}^2$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω et $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \Omega$.

- 1er cas : si $a \in \Omega$ est un point critique de f et si pour tout $x \in \Omega$, $Spec(\nabla^2(f)(x)) \subset \mathbb{R}_+$, alors f admet en a un minimum global.
- 2ème cas : si $a \in \Omega$ est un point critique de f et si pour tout $x \in \Omega$, $Spec(\nabla^2(f)(x)) \subset \mathbb{R}_-$, alors f admet en a un maximum global.

II.1) Exercices : extrema sur un ouvert

Méthode pour l'étude des extrema sur un ouvert :

1. Bien maîtriser l'ensemble d'étude et le nombre de variables. Vérifier que l'on travaille bien sur un ouvert.
2. Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ (ou $\mathcal{C}^1$ si cela suffit).
3. On calcule les dérivées partielles d'ordre 1 et on recherche les points critiques.
4. On calcule les dérivées d'ordre 2, la hessienne, on étudie le signe de la forme quadratique associée (directement ou via la hessienne).
   On utilise les conditions du second ordre, ou alors une aide del'énoncé.
5. Savoir écrire le DL1 ou DL2.
6. Dans le cas particulier des fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ il y avait dans l'ancien programme les "règles de Monge": elles sont maintenant hors-programme, il est interdit de les utiliser (sauf si on vous les fait démontrer avant !).

Exercice 2
Soit $f : \Omega = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, où $f(x, y) = x.(\ln(x))^2 + y^2)$.
Etudier les extremas de f sur Ω

Exercice 3
Soit $f : \Omega =]-1; +\infty[^3 \to \mathbb{R}$, où $f(x, y; z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x.y.z.$.
Etudier les extremas de f sur Ω

Exercice 4

1. Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, où $g(x, y) = x^2 + y^4$. Etudier les extrema de g sur $\mathbb{R}^2$.
2. Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,n où $h(x, y) = x^2 - y^4$. Etudier les extrema de h sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ où $f(x, y, z) = z^2.e^{x+y}$.
Etudier les extrema de f sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6
Soit $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ où

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} (n - x_k)^2 + (\sum_{k=1}^{n} x_k)^2$$

1. (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$.
   (b) Prouver que f admet un seul point critique a à déterminer.
2. Déterminer la hessienne $\nabla^2(f)(a)$, la forme quadratique q_a associée en $a \in \mathbb{R}^n$. Que remarque-t-on ?
3. Etudier les extrema de f.

Exercice 7
Soit $n \geq 3$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, où

$$f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + (\sum_{k=1}^{n} x_k)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

1. (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n$ et déterminer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
   (b) Prouver que f admet un seul point critique à déterminer.
2. Déterminer la hessienne $T_n = \nabla^2(f)(b)$ et la forme quadratique associée q_b en tout point b.
3. Soit J_n la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1.
   (a) Quel est le rang de J_n ? En déduire que 0 est valeur propre de J_n et donner la dimension du sous-espace propre associé.

(b) Vérifier que le vecteur $U_n \in \mathcal{M}_{n,1}(R)$ dont tous les coefficients sont égaux à 1 est un vecteur propre de J_n.

(c) En déduire le spectre de J_n.

4. (a) Déterminer le spectre de $\nabla^2(f)(a)$.

(b) Justifier que f admet un seul extremum local, atteint au seul point a, égal à $-\frac{n}{4(n+1)}$. Préciser sa nature.

(c) Que peut-on dire de cet extremum ?

III. Compléments de topologie : ouverts, fermés, bornés de $\mathbb{R}^n$

Définition III.1
Boule ouverte, boule fermée
Soit $a = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$.
$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ d(a, x) < r\} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x - a\| < r\}$ est la **boule ouverte** de centre a et de rayon r.
$B_f(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n;\ d(a, x) \leq r\} = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x - a\| \leq r\}$ est la **boule fermée** de centre a et de rayon r.

Définition III.2
Ensemble borné
Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que Ω est **borné** si $\exists\ r > 0;\ \Omega \subset B_f(0, r)$, c'est-à-dire si $\exists r > 0;\ \forall x \in \Omega, \|x\| \leq r$.

Exemple

- Toute boule de $\mathbb{R}^n$ est bornée.
- Un segment est borné.
- Soit $\Omega \subset \Omega' \subset \mathbb{R}^n$. Si Ω' est borné, alors Ω est borné.
- Toute réunion finie d'ensembles bornés est bornée.

Définition III.3
Ouvert de $\mathbb{R}^n$ (rappel)
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ si $\forall x \in \Omega$, $\exists r > 0; B(x, r) \subset \Omega$.
Par convention, $\emptyset$ est un ouvert.

Exemple
Ouverts de référence (rappel) :

- $\mathbb{R}^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- Toute boule ouverte est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- Toute réunion d'ouverts est un ouvert.
- Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert.

- Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}$.
  $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ f(x_1, \cdots, x_n) > a\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$;
  $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ f(x_1, \cdots, x_n) < a\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition III.4
Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$. On dit que Ω est un **fermé** de $\mathbb{R}^n$ ssi son complémentaire $\overline{\Omega}$ est un ouvert.

Exemple
Fermés de référence :

- $\mathbb{R}^n$ et $\emptyset$ sont des fermés de $\mathbb{R}^n$ (et aussi des ouverts de $\mathbb{R}^n$).
- Toute boule fermée est un fermé de $\mathbb{R}^n$.
- Toute réunion finie de fermés est un fermé.
- Toute intersection de fermés est un fermé.
- Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}$.
  $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ f(x_1, \cdots, x_n) \geq a\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$;
  $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ f(x_1, \cdots, x_n) \leq a\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$;
  $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ f(x_1, \cdots, x_n) = a\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

Proposition III.1
hyperplans et demi-espaces de $\mathbb{R}^n$
Soit $(a_1, \cdots, a_n, c) \in \mathbb{R}^n$ et f une fonction affine, telle que

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, \cdots, x_n) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$$

L'hyperplan affine

$$\{(x_1 \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = c\}$$

est un fermé de $\mathbb{R}^n$. Les deux demi-espaces ouverts

$$\{(x_1 \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n < c\}$$

$$\{(x_1 \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n > c\}$$

sont deux ouverts de $\mathbb{R}^n$.Les deux demi-espaces fermés

$$\{(x_1 \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \leq c\}$$

$$\{(x_1 \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n \geq c\}$$

sont des fermés

IV. Extremum sur un fermé borné

Théorème IV.1
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ un fonction définie sur Ω.
Si :

1. f est continue sur Ω,
2. Ω est un fermé borné de $\mathbb{R}^n$,

alors f admet un maximum global et un minimum global sur Ω.
Autrement dit :

$$\exists (a,b) \in \Omega^2; \quad \forall x \in \Omega, \quad f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

Une fonction continue sur un fermé borné est bornée et atteint ses bornes

Remarque
Ceci généralise le résultat du cours sur les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Il s'agit uniquement d'un théorème d'existence, qui ne dit pas comment calculer effectivement ces extrema.

Méthode : pour déterminer les extrema, l'idée est d'utiliser les outils précédents sur l'"intérieur de Ω" qui est un ouvert, puis d'étudier f sur la "frontière" de Ω (le bord de Ω), puis de rassembler les deux en utilisant le théorème précédent. L'énoncé devrait guider...

Exercice 8
On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^3 - 3x.(1+y^2)$.

1. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1\}$ et $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 = 1\}$.
   (a) Justifier que f admet un maximum M et un minimum m sur $\mathcal{D}$ et que ces extremums sont atteints sur $\mathcal{C}$.
   (b) En ramenant l'étude sur $\mathcal{C}$ à l'étude d'une fonction d'une variable, déterminer M et m.
2. Etudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9
Soit $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x+y \leq 1\}$.
On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, où

$$f(x,y) = 3x^2 + 2y^2 - 4x - 3y + 4xy + 2$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{D}$.
2. Justifier que f admet un maximum M et un minimum m sur $\mathcal{D}$.
3. Soit $\mathcal{D}^o = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0, y > 0 \text{ et } x+y < 1\}$. Etudier les extremums de f sur $\mathcal{D}^o$.
4. (a) Soit $F_1 = \{(x,y) \in \mathcal{D};\ y = 0\}$. Etudier les extremums de f sur F_1.
   (b) Soit $F_2 = \{(x,y) \in \mathcal{D};\ x = 0\}$. Etudier les extremums de f sur F_2.
   (c) Soit $F_3 = \{(x,y) \in \mathcal{D};\ x+y = 1\}$. Etudier les extremums de f sur F_3.
5. En déduire l'étude des extremums de f sur $\mathcal{D}$.

Exercice 10
Extrait maths2 2016 sans aucune aide.
On considère l'application $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ où $f(u,v) = u + v - 2.u.v$.
Etudier les extremums de f sur $[0,1]^2$.

V. Extrema sous contraintes linéaires

V.1) Méthode élémentaire par diminution du nombre de variables

Exemple
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, où $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 2z^2$.
Etudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^3$ sous la contrainte $2x - y + z = 3$.
Cela revient à étudier les extremums de f sur

$$\mathcal{C} = \{(x,y,z) \in R^3;\ \ 2x - y + z = 3\}$$

Il s'agit d'une contrainte linéaire et on peut remplacer l'une des variables en fonction des autres.
Etudier les extremums de f sur $\mathcal{C}$ revient à étudier les extremums de $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, où par exemple $g(x,z) = f(........, ..., ...)$.

Exercice 11
On considère $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, où $f(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$.
Etudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^3$ sous les contraintes linéaires $x + y = 2$ et $t + z = 0$.

Exercice 12
On considère $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, où $f(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^2$.
Etudier les extremums de f sur $\mathbb{R}^n$ sous la contrainte $\sum_{k=1}^n x_k = n$.

V.2) Recherche d'extrema sous contraintes d'égalités linéaires

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application, et un système linéaire de p équations à n inconnues :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ & \vdots \\ a_{p,1}x_1 + \cdots + a_{p,n}x_n &= b_p \end{cases}$$

où les $a_{i,j}$ et b_i sont des réels fixés, et où pour tout $i \in [[1,p]]$, la forme linéaire

$$g_i(x_1, \cdots, x_n) = a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n$$

correspondant à la i-ème ligne du système est non nulle.
On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des solutions du système linéaire

$$\begin{cases} g_1(x) &= b_1 \\ & \vdots \\ g_p(x) &= b_p \end{cases}$$

d'inconnue $x = (x_1, ..., x_n)$. On note également $\mathcal{H}$ l'ensemble des solutions du système homogène associé :

$$\begin{cases} g_1(x) &= 0 \\ & \vdots \\ g_p(x) &= 0 \end{cases}$$

Proposition V.1
Pour tout $i \in [[1,p]]$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\nabla(g_i)(x) = \begin{pmatrix} a_{i,1} \\ \vdots \\ a_{i,n} \end{pmatrix}$ ne dépend pas de x.
On note ∇g_i ce vecteur. Alors

$$\boxed{\mathcal{H}^\perp = Vect(\nabla g_1, \cdots, \nabla g_n)}$$

Preuve assez facile cette fois !!

Théorème V.1
Condition nécessaire d'obtention d'un maximum sous contrainte linéaire
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Soit $a \in \Omega\ \cap \mathcal{C}$.
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et f admet un extremum local en $a \in \Omega \cap \mathcal{C}$ sous la contrainte $\mathcal{C}$, alors

$$\boxed{\nabla f(a) \in \mathcal{H}^{\perp} = Vect(\nabla g_1, \cdots, \nabla g_n)}$$

Il existe donc des réels λ_1, ... ,λ_p tels que $\nabla f(a) = \lambda_1 \nabla g_1 + \cdots + \lambda_p \nabla g_p$.
Un point $a \in \Omega \cap \mathcal{C}$ tel que $\nabla(f)(a) \in \mathcal{H}^{\perp}$ est appelé **point critique de f sous la contrainte $\mathcal{C}$.**

Remarque
Il faut ensuite poursuivre par l'étude du signe de $f(a+h) - f(a)$ où $h \in \mathcal{H}$.
Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, comme $\nabla(f)(a) \in \mathcal{H}^{\perp}$ à l'aide du DL2 en a :

$$\forall h \in \mathcal{H},\ f(a+h) - f(a) = 0 + \frac{1}{2} q_a(h) + \|h\|^2 .\epsilon(h) \quad \text{où } \epsilon \text{ continue en } \ (0, \cdots, 0)$$

selon le signe de la forme quadratique : f admettra (éventuellement) un minimum local ou un maximum local sous la contrainte $\Omega \cap \mathcal{C}$.
Bien souvent on se contente de diminuer le nombre de variables, ce qui est bien plus simple !!

Exercice 13
Etudier $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ où $f(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ sous la contrainte $\left\{ \begin{array}{l} x + y = 2 \\ t + z = 0 \end{array} \right.$.

VI. Complément (HP)

Exercice 14
(dans l'ancien programme)
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et q la forme quadratique associée, $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

1. Montrer que q admet un maximum global β et un minimum global α sur l'ensemble $\mathcal{S} = \{x \in \mathbb{R}^n /\ \|x\| = 1\}$.
2. Montrer que pour tout élément $h \in \mathbb{R}^n$,
$$\alpha \|h\|^2 \leq q(h) \leq \beta \|h\|^2$$
3. Montrer que q admet un maximum global (respectivement un minimum global) sous la contrainte $\|x\| = 1$, en un point correspondant à un vecteur propre de la matrice A associé à la plus grande valeur propre (respectivement la plus petite), ce vecteur étant de norme 1.
Autrement dit, α est la plus petite valeur propre de A et β est la plus grande valeur propre de A.