ECG2 - Lycée Saint Just
Mathématiques

Programme de colle - **Semaine 19**
du 17 au 21 mars 2025

`Informatique : programmation en Python`

Tout !

Chapitre 13 - Formes quadratiques

- Forme quadratique associée à une matrice symétrique A : définition.
- **Théorème** :
  - $Spec(A) \subset [0;+\infty[\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n$, $q_A(x) \geq 0$ (q_A est positive).
  - $Spec(A) \subset]0;+\infty[\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $q_A(x) > 0$ (q_A est définie positive).
  - $Spec(A) \subset]-\infty,0] \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n$, $q_A(x) \leq 0$ (q_A est négative).
  - $Spec(A) \subset]-\infty,0[\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $q_A(x) < 0$ (q_A est définie négative).
  - Si A possède une valeur propre strictement positive et une valeur propre strictement négative alors q_A change de signe.
- Méthodes pour étudier le signe d'une forme quadratique :
  1. Tester quelques valeurs. Si on obtient une valeur > 0 et une valeur < 0 alors q_A change de signe!
  2. Ecrire q_A comme une somme/différence de carrés. On essaie d'"épuiser une inconnue" en faisant apparaître tous les termes correspondants dans un premier carré, puis on recommence.
  3. On calcule $Spec(A)$ et on applique le Théorème. Il faut d'abord calculer $Spec(A)$ (plus long !)

Chapitre 14 - Fonctions de n variables I (tout)

Tous les résultats sont admis

- Notion de boule ouverte, d'ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une réunion (même infinie) d'ouverts est un ouvert; une intersection finie d'ouverts est un ouvert.
- Exemples de fonctions de n variables : fonctions affines, fonctions polynômiales.
- Déclaration d'une fonction de deux ou trois variables dans Python.
- Graphe d'une fonction de n variables. Ligne de niveau λ.
- Extremum local, extremum global : définitions. Exemples simples.
- Continuité d'une fonction de n variables. Théorèmes généraux : opérations algébriques (somme, produit, quotient), composition.
- Les fonctions polynômiales sont continues sur $\mathbb{R}^n$.
- Théorème :
  Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ et $a \in \mathbb{R}^n$.
  1. $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ \ f(x_1, \cdots, x_n) > a\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$

  2. $\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n;\ \ f(x_1, \cdots, x_n) < a\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$

  Pour montrer qu'un ensemble est un ouvert nous utilisons ce théorème + stabilité par réunion et intersection (finie)
- Dérivée partielle d'ordre 1. Théorèmes généraux.
- **Gradient de** f **en** a, noté $\nabla f(a)$. Les vecteurs gradients sont orthogonaux aux lignes de niveaux.
- Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert. Théorèmes généraux (somme, produit, quotient, composition).
- Les fonctions polynômiales sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
- DL d'ordre 1 : si f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω, si $x \in \Omega$, si $h \in \mathbb{R}^n$ alors pour h voisin de $(0, \cdots, 0)$,
  $$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \|h\| .\epsilon(h)$$
  où $\epsilon(0, ..., 0) = 0$ et ϵ est continue en $(0, ..., 0)$.
- Dérivée de $g(t) = f(x + th)$ (avec les bonnes hypothèses) : $g'(t) = \langle \nabla f(x + th), h \rangle$.
- **Condition nécessaire d'ordre** 1 **d'existence d'un extremum local :**
  Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et $a \in \Omega$.
  Si f admet un extremum local en a, **alors** $\nabla f(a) = 0$
- Point critique : les points où le gradient s'annule.

Chapitre 15 - Fonctions de n variables II (début)

Tous les résultats sont admis

- Dérivées partielles d'ordre 2, notion de fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert Ω.
- Théorème de Schwarz.
- Matrice hessienne $\nabla^2 f(a)$ et forme quadratique associée q_a.
- DL d'ordre 2.
- Dérivée seconde de $g(t) = f(a + th)$ où $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ et $a \in \Omega$, $h \in \mathbb{R}^n$.
- Condition suffisante d'obtention d'un extremum local en un point critique, à l'aide de la forme quadratique q_a.
- **Condition suffisante d'ordre 2 d'obtention d'un extremum local** en un point critique, à l'aide du **spectre de la matrice hessienne**.

.

(*) : **preuve exigible**