CB2 premier sujet - Lundi 4 mars 2024

Ce devoir est composé de trois exercices.

Exercice 1 : étude d'une suite définie implicitement

La lettre n désigne un entier naturel non nul.
Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \geq 0,\ f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ d'inconnue x admet une seule solution positive, notée u_n.
2. (a) Vérifier que u_n appartient à $]0, 1[$.
   (b) En déduire le signe de $f_{n+1}(u_n)$ puis établir que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Conclure que la suite (u_n) converge et que sa limite appartient à $[0, 1]$.
   (d) Montrer par l'absurde que la limite de la suite (u_n) vaut 1.
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = 1 - u_n$.
   (a) Justifier que v_n est strictement positif, puis montrer que $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -nv_n$.
   (b) Etablir que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$ et en déduire que : $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$.
   (c) Montrer enfin que : $v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}$.
4. Donner la nature des séries de termes généraux v_n et v_n^2.

Exercice 2 : discrétisées de variables à densité

Soit x un réel, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie réelle de x c'est-à-dire l'unique entier $\lfloor x \rfloor = N$ tel que $N \leqslant x < N + 1$.

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. On définit X_d sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ par :

$$\forall \omega \in \Omega, \quad X_d(\omega) = \lfloor X(\omega) \rfloor.$$

On admet que X_d est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On l'appelle "la discrétisée de X".

Le problème étudié dans cet exercice consiste :

- à étudier quelques propriétés de la discrétisée de variables suivant certaines lois usuelles (**Partie 1**)
- puis à établir qu'une variable discrète, satisfaisant à certaines conditions, est la variable discrétisée d'une variable à densité (**Partie 2**).

Les Parties 1 et 2 sont largement indépendantes.

Partie 1 : Calculs de discrétisées

1. Python
Soit X une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[0,a]$ $(a \in \mathbb{R}_+)$ et X_d sa discrétisée. Ecrire une fonction Python intitulée `def Xd(a):` qui à un réel a positif fourni par l'utilisateur renvoie une réalisation de X_d.

2. Soit X une variable aléatoire possédant une densité f. Montrer que:
$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathrm{P}\left(X_d = k\right) = \int_k^{k+1} f(x)dx$$

3. Soit N un entier naturel non nul et X une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur l'intervalle $[0,N]$.
Déterminer la loi de X_d (on précisera les valeurs prises par X_d).

4. Etablir que l'on définit bien une variable aléatoire discrète Y en posant :
$$Y(\Omega) = \{1, 2 \ldots 9\} \quad \text{et} \quad \forall k \in Y(\Omega),\ \mathrm{P}(Y=k) = \frac{1}{\ln(10)} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$
Proposer une densité f telle que si une variable aléatoire X posséde f pour densité alors sa discrétisée X_d suit la loi de Y.

5. Soient X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et n un entier naturel non nul. On pose $Y_n = \dfrac{\lfloor nX \rfloor}{n}$.
   (a) Justifier que la variable nX possède une densité f_n que l'on précisera.
   (b) Donner la loi de la variable $\lfloor nX \rfloor$. Vérifier que $\lfloor nX \rfloor + 1$ suit une loi usuelle dont on donnera le nom et le paramètre.
   (c) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Prouver que :
   $$\mathrm{P}\left(Y_n \leqslant x\right) = 1 - \exp\left(-\frac{\lambda(\lfloor nx \rfloor + 1)}{n}\right)$$
   (d) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.
   (e) Montrer que la suite $(Y_n)_{n \geqslant 0}$ converge en loi vers une variable aléatoire Y dont on précisera la loi.

Partie 2 : condition suffisante pour être une discrétisée

On considère une variable aléatoire Y définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ ainsi qu'une fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$ et telles que :
$$Y(\Omega) = \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}(Y=k) = g(k).$$
En particulier, la série $\sum_{k \geqslant 0} g(k)$ converge et $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g(k) = 1$.

On suppose en outre que g est décroissante et qu'il existe un réel $C \geqslant 0$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \left|g'(x)\right| \leqslant \frac{C}{(1+x)^2} \text{ et } \left|g''(x)\right| \leqslant \frac{C}{(1+x)^2}$$

Pour tout réel x, on pose :

$$\begin{cases} f(x) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} g'(x+k) \text{ si } x \geqslant 0 \\ f(x) = 0 \text{ si } \ x < 0. \end{cases}$$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Prouver la convergence de la série $\sum_{k\geqslant 0} g'(x+k)$.
Quel est le signe de f ?

(b) i. Etablir que $\forall (x,a) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\left|g'(x+k) - g'(a+k)\right| \leqslant \frac{C|x-a|}{(k+1)^2}$$

ii. Prouver l'existence d'un réel $D \geqslant 0$ tel que :

$$\forall (x,a) \in (\mathbb{R}_+)^{2\cdot}, \quad |f(x) - f(a)| \leqslant D|x-a|$$

Justifier la continuité de f en tout réel $a \in \mathbb{R}_+$.

(c) Soit t un réel positif, pour tout entier N, on pose :

$$S_N(t) = -\sum_{k=0}^{N} g'(t+k) \quad \text{ et } \quad R_N(t) = -\sum_{k=N+1}^{+\infty} g'(t+k)$$

i. Démontrer que : $\forall k \geqslant 1$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{1}{(t+k+1)^2} \leqslant \frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1}.$$

puis que : $\forall N \geqslant 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad |R_N(t)| \leqslant \frac{C}{N+1}$.

ii. Prouver que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \int_0^1 f(t)dt = g(0) - g(N+1) + \int_0^1 R_N(t)dt$$

iii. Justifier que $\lim_{k\to+\infty} g(k) = 0$ et que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = g(0)$

(d) i. Vérifier que :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad f(t+1) - f(t) = g'(t)$$

puis que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$$

ii. Pour tout entier $N \geqslant 0$, on pose $S_N = \displaystyle\int_0^N f(t)dt$.

Etablir que : $\forall N \geqslant 1, \quad S_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} g(k)$, puis que:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad S_{\lfloor x \rfloor} \leqslant \int_0^x f(t)dt \leqslant S_{\lfloor x \rfloor + 1}$$

En déduire la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ et montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)dt = 1$.

iii. Démontrer que f peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire X et que sa discrétisée X_d suit la même loi que Y.

Exercice 3 : étude d'un produit scalaire, matrice de Hilbert

Les deux parties de cet exercice sont en grande partie indépendantes.

Partie 1 : produit scalaire et polynômes de Legendre

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère les polynômes $P_k = X^k.(1-X)^k$ et $L_k = (P_k)^{(k)}$.

(Autrement dit, L_k est égal à la dérivée k-ième de P_k)

1. Vérifier que l'on définit un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}[X]$ en posant :

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) \cdot dt$$

2. Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$; déterminer $\left\langle X^i, X^j \right\rangle$ en fonction de i et j.

   Dans la suite du problème $E = \mathbb{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire $\langle ., . \rangle$.
   Soit $P \in \mathbb{R}[X]$; on note $\|P\| = \sqrt{\langle P, P \rangle}$ la norme de P associée à ce produit scalaire.

3. (a) Préciser L_0, L_1 et L_2 et leur degré ; justifier que (L_0, L_1, L_2) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_2$[X].

   (b) Soit p la projection orthogonale sur $\mathbb{R}_1[X]$.
   Calculer $p(X^2)$.
   On considère la restriction de p à l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$: préciser la matrice Δ de p dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

   (a) Préciser le degré des polynômes P_k et L_k et leurs coefficients dominants .

   (b) Justifier que $\forall i \in [[0; k-1]], (P_k)^{(i)}(0) = (P_k)^{(i)}(1) = 0$

   (c) Via la formule de Leibniz prouver que

$$L_k = k!\ .(-1)^k \ . \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \cdot X^{k-j} \cdot (X-1)^j$$

   en déduire $L_k(0)$ et $L_k(1)$.

5. (a) Prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\forall (f,g) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})^2$,

$$\int_0^1 f(t)g^{(k)}(\mathrm{t}) \cdot \mathrm{d}t = \left[\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \cdot f^{(j)}(t) g^{(k-j-1)}(t) \right]_0^1 + (-1)^k \int_0^1 f^{(k)}(\mathrm{t}) \cdot g(t) dt$$

   (b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$; prouver alors que pour tout $P \in \mathbb{R}_{k-1}$[X], $\quad \langle P, L_k \rangle = 0$.

6. Prouver finalement que $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n$[X].

Partie 2 : étude de la matrice de Hilbert

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note H_n la matrice carrée d'ordre n définie par $H_n = (h_{i,j})$ où $\forall (i,j) \in [[1;n]]^2$, $h_{i,j} = \frac{1}{i+j-1}$. Autrement dit :

$$H_n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix}$$

7. Python
   Ecrire une fonction Python intitulée `def H(n):` qui renvoie la matrice H_n.

8. (a) Justifier l'existence d'une matrice orthogonale $R_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et d'une matrice diagonale $D_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ notée $D_n = Diag\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ telles que $H_n = R_n \cdot D_n \cdot {}^tR_n$.

   On suppose que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ et on note $\lambda_1 = u_n$ la plus petite des valeurs propres et $\lambda_n = v_n$ la plus grande des valeurs propres de H_n.

   (b) Cas particulier $n = 2$.
   Calculer le spectre de H_2 et donner u_2 et v_2.

9. Soit $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ où $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

   (a) Justifier (on pourra éventuellement utiliser le produit scalaire de la Partie 1) que

   $$\int_0^1 (P(t))^2 \, dt = {}^tA.H_n.A$$

   (b) En déduire que les valeurs propres de H_n sont strictement positives .

   (c) Soit $C = {}^tR_n.A$, où l'on note $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

   Justifier en utilisant le 8.a) et la matrice C que:

   $$u_n.\,{}^tA.A \leq {}^tA.H_n.A \leq v_n.\,{}^tA.A$$

10. Limite de la suite (u_n)

    (a) Prouver que $\forall k \in \mathbb{N}^*$,

    $$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

    En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

    $$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \ln(n) + 1$$

    et enfin que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

(b) On note $\operatorname{Tr}(H_n)$ la trace de H_n. Prouver que pour tout $n \geq 2$,

$$n.u_n \leq \operatorname{Tr}(H_n) \leq \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$$

(c) En déduire finalement que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

11. Monotonie de la suite (v_n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de H_n associé à la valeur propre v_n.

On note également $B = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

(a) Prouver que ${}^tA.H_n.A = v_n \cdot {}^tA.A$.

(b) Prouver via le 9.a) que ${}^tB \cdot H_{n+1} \cdot B = {}^tA \cdot H_n \cdot A$

(c) En déduire que $v_n \leq v_{n+1}$. Conclure .