CB2 premier sujet - Lundi 4 mars 2024

Exercice 1 (Edhec 2018)

La lettre n désigne un entier naturel non nul.
Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \geq 0,\ f_n(x) = 1 - x - x^n$.

1. La fonction f_n est polynômiale donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$.
Pour tout $x \geq 0$, $f_n'(x) = -1 - n.x^{n-1} < 0$, la fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Etant continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$, f_n est bijective de $[0; +\infty[$ sur $]-\lim_{x\to+\infty} f_n(x); f_n(0)] =]-\infty, 1]$.
Comme $0 \in]-\infty, 1]$, $\boxed{\text{l'équation } f_n(x) = 0 \text{ d'inconnue } x \text{ admet une seule solution positive, notée } u_n}$

2. (a) On a de plus $f_n(1) = -1 < 0$. Ainsi $f_n(1) < f_n(x) < f_n(0)$. Par stricte décroissance de f_n sur $\mathbb{R}_+$, on a donc $\boxed{u_n \in]0, 1[}$

   (b) $f_{n+1}(u_n) = 1 - u_n - u_n^{n+1} = u_n^n - u_n^{n+1} = u_n^n(1 - u_n) \geq 0$ car $u_n \in]0, 1[$.
   On en déduit que $f_{n+1}(u_n) \geq f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$. Par stricte décroissance de f_{n+1}, on a alors $u_n \leq u_{n+1}$.

   Bilan : $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$

   (c) Etant croissante et majorée par 1, la suite (u_n) est convergente. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$. Par passage à la limite dans une inégalité large, sa limite appartient à $[0, 1]$.

   Bilan : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = l \in [0, 1]}$

   (d) Supposons que $l \in [0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - u_n^n = 1 - \exp(n. \ln(u_n))$. Par continuité de la fonction ln sur $]0; +\infty[$, $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \ln(l) < 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} n. \ln(u_n) = -\infty$, et finalement $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$, ce qui est absurde puisque l'on suppose $l \in [0, 1[$!!

   Bilan : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 1}$

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = 1 - u_n$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0, 1[$ donc $v_n > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$1 - u_n - u_n^n = 0 \Rightarrow v_n = u_n^n \Rightarrow \ln(v_n) = n \ln(u_n) \Rightarrow \ln(v_n) = n. \ln(1 - v_n)$$
   Comme $\ln(1 + x) \sim_{x\to 0} x$ et $\lim_{n\to+\infty}(-v_n) = 0$, on a $\ln(1 - v_n) \sim_{n\to+\infty} -v_n$, et enfin

   Bilan : : $\boxed{\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -nv_n}$

   (b) On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \ln(\frac{-\ln(v_n)}{n.v_n}) = \ln(1) = 0$ et comme $\lim_{n\to+\infty} -\ln(v_n) = +\infty$, on a bien
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = 0$$
   D'où
   $$\frac{\ln\left(\frac{-\ln(v_n)}{nv_n}\right)}{-\ln(v_n)} = \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)} + \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} + 1 \to_{n\to+\infty} 0$$

   Comme $\lim_{n\to+\infty} -\ln(v_n) = +\infty$, et que par CC $\lim_{X\to+\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(-\ln(v_n))}{-\ln(v_n)}$.
   Ainsi $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(v_n)} = -1$ et donc $\boxed{\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)}$

   (c) En remplacant dans le a., on a alors $\boxed{v_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(n)}{n}}$

4. Comme $v_n \sim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} \geq \frac{1}{n}$ (pour n assez grand) et que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), par critère de majoration puis d'équivalence $\boxed{\text{la série de terme général } v_n \text{ est divergente}}$

   $v_n^2 \sim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(n))^2}{n^2}$. Par CC
   $$\frac{\frac{(\ln(n))^2}{n^2}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{\ln(n)^2}{n^{1/2}} = 0$$
   donc $\frac{(\ln(n))^2}{n^2} = o_{n\to+\infty}(\frac{1}{n^{3/2}})$. Comme la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge (Riemann avec $\alpha = 3/2 > 1$), par critère de négligeabilité puis d'équivalence $\boxed{\text{la série de terme général } v_n^2 \text{ converge}}$

Exercice 2 : d'après Ecricome 2013

Partie 1 : Calculs de discrétisées

1. ```
   def Xd(a):
       X=a*rd.random()
       return np.floor(X)
   ```

2. Soit X une variable aléatoire possédant une densité f. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,
$$\begin{aligned} P(X_d = k) &= P(\lfloor X \rfloor = k) \\ &= P(k \leq X < k + 1) \\ &= \int_k^{k+1} f(x)dx \end{aligned}$$
car X est à densité de densité f.

3. Attention, $P(X = N) = 0$, on peut donc considérer que X est (presque sûrement) à valeurs dans $[0, N[$ et $X_d(\Omega) = [[0, N - 1]]$. De plus X a pour densité
$$f_X : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{N} \text{ si } x \in [0, N] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$
Donc pour tout $k \in [[0, N - 1]]$,
$$P(X_d = k) = \int_k^{k+1} \frac{1}{N} dt = \frac{1}{N}$$
Bilan : $\boxed{X_d \hookrightarrow \mathcal{U}([[0, N - 1]])}$

4. Il s'agit de vérifier que les valeurs de $P(Y = k)$ proposées sont bien positives et que leur somme est égale à 1.
   - Tout d'abord, pour tout $k \in [[1, 9]]$, $\frac{k+1}{k} \geq 1$, donc $\ln(\frac{k+1}{k}) \geq 0$ et $P(Y = k) \geq 0$.
   ```

- Ensuite

$$\begin{aligned}\sum_{k\in Y(\Omega)} P(Y=k) &= \sum_{k=1}^{9}\frac{1}{\ln(10)}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)\\ &= \frac{1}{\ln(10)}.\sum_{k=1}^{9}\ln(k+1)-\ln(k)\\ &= \frac{1}{\ln(10)}.(\ln(10)-\ln(1)) \text{ par télescopage}\\ &= 1\end{aligned}$$

Bilan provisoire : $\boxed{\text{ces valeurs définissent bien la loi d'une variable aléatoire } Y}$

En s'inspirant de la question 2., on définit $f:[1,10]\to\mathbb{R}$ par :

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\ln(10)}.\frac{1}{x} & \text{si } x\in[1,10]\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

La fonction f ainsi définie est bien positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1,10\}$. De plus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{\ln(10)}.\int_1^{10}\frac{1}{x}dx = \frac{1}{10}.[\ln(x)]_1^{10}=1$$

Donc f est bien la densité de probabilité d'une variable à densité X.
Enfin, pour cette variable X, on a $X(\Omega)=[1,10]$. Comme X est à densité, $P(X=10)=0$ et on peut considérer que $X(\Omega)=[1,10[$. D'où $X_d(\Omega)=[[1,9]]$ et pour tout $k\in[[1,9]]$,

$$P(X_d=k)=\int_k^{k+1}\frac{1}{\ln(10)}.\frac{1}{t}dt = \frac{1}{10}.(\ln(k+1)-\ln(k)) = P(Y=k)$$

Bilan : $\boxed{\text{la discrétisée } X_d \text{ de la variable } X \text{ définie ci-dessus suit la loi de } Y}$

5. Soient X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ et n un entier naturel non nul. On pose $Y_n=\frac{\lfloor nX\rfloor}{n}$.

   (a) Comme $X(\Omega)=\mathbb{R}_+$, on a aussi $nX(\Omega)=\mathbb{R}_+$.
   Pour tout $x<0$, on a donc $F_{nX}(x)=0$.
   Pour tout $x\geq 0$,

   $$F_{nX}(x)=P(nX\leq x)=P(X\leq\frac{x}{n})=1-\exp(-\lambda.\frac{x}{n})$$

   On reconnait la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\frac{\lambda}{n}$: on a donc $nX\hookrightarrow\mathcal{E}(\frac{\lambda}{n})$. Cette variable est donc à densité et d'après le cours, elle admet comme densité :

   $$f_{nX}: x\mapsto\begin{cases}0 \text{ si } x\leq 0\\ \frac{\lambda}{n}.\exp(-\lambda.\frac{x}{n})\end{cases}$$

   (b) Comme $(nX)(\Omega)=\mathbb{R}_+$, on a $\lfloor nX\rfloor(\Omega)=\mathbb{N}$. Soit $k\in\mathbb{N}$.

   $$\begin{aligned}P(\lfloor nX\rfloor=k) &= \int_k^{k+1}\frac{\lambda}{n}.\exp(-\lambda.\frac{x}{n})dx\\ &= [-\exp(-\lambda.\frac{x}{n})]_k^{k+1}\\ &= \exp(-\lambda.\frac{k}{n})-\exp(-\lambda.\frac{k+1}{n})\\ &= (1-\exp(-\lambda.\frac{1}{n})).\exp(-\lambda.\frac{k}{n})\end{aligned}$$

   Notons $Z_n=\lfloor nX\rfloor+1$. Alors $Z_n(\Omega)=\mathbb{N}^*$, et pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

   $$\begin{aligned}P(Z_n=k) &= P(X_n=k-1)\\ &= (1-\exp(-\lambda.\frac{1}{n})).\exp(-\lambda.\frac{k-1}{n})\\ &= (1-e^{-\frac{\lambda}{n}}).(e^{-\frac{\lambda}{n}})^{k-1}\end{aligned}$$

   Bilan : $\boxed{Z_n=\lfloor nX\rfloor+1 \text{ suit la loi géométrique } \mathcal{G}(1-e^{-\frac{\lambda}{n}})}$

   (c) Soit $x\in\mathbb{R}_+$. On a alors

   $$\begin{aligned}P(Y_n\leq x) &= P(\frac{\lfloor nX\rfloor}{n}\leq x)\\ &= P(\lfloor nX\rfloor\leq nx)\\ &= P(\lfloor nX\rfloor\leq\lfloor nx\rfloor) \text{ car X est à valeurs entières}\\ &= P(Z_n\leq\lfloor nx\rfloor+1)\\ &= 1-P(Z_n>\lfloor nx\rfloor+1)\\ &= 1-(e^{-\frac{\lambda}{n}})^{\lfloor nx\rfloor+1} \text{ cela revient à } \lfloor nx\rfloor+1 \text{ échecs dans le processus de Bernoulli}\\ &= 1-\exp\left(-\frac{\lambda(\lfloor nx\rfloor+1)}{n}\right)\end{aligned}$$

   (d) Le début est un cadeau !!
   Pour tout $x>0$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$,

   $$nx-1\leq\lfloor nx\rfloor\leq nx\Rightarrow x-\frac{1}{n}\leq\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\leq x$$

   donc par encadrement $\lim_{n\to+\infty}\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}=x$.
   On en déduit que

   $$\lim_{n\to+\infty}-\frac{\lambda(\lfloor nx\rfloor+1)}{n}=-\lambda.x$$

   puis par continuité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$,

   $$\lim_{n\to\infty}F_{Y_n}(x)=\lim_{n\to+\infty}P(Y_n\leq x)=1-\exp(-\lambda.x)$$

   et comme pour tout $x<0$, $F_{Y_n}(x)=0$, on en déduit le résultat suivant :

   Bilan : $\boxed{Y_n\xrightarrow{\mathcal{L}}Y \text{ où } Y\hookrightarrow\mathcal{E}(\lambda)}$

Partie 2 : condition suffisante pour être une discrétisée

(a) Soit $x\in\mathbb{R}_+$. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$,

$$|g'(x+k)|\leq\frac{C}{(1+x+k)^2}\leq\frac{C}{k^2}$$

Comme la série $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^2}$ converge (série de Riemann avec $\alpha=2>1$), par critère de majoration, la série $\sum_{k\geqslant 0}g'(x+k)$ est absolument convergente, donc convergente.
Par hypothèse la fonction g est décroissante, sa dérivée g' est donc négative et f est à valeurs positives.

(b) i. Soit $k \in \mathbb{N}$. On considère l'intervalle $I = [k; \infty[$. D'après l'hypothèse, pour tout $t \in I$,

$$|g''(t)| \leq \frac{C}{1+t^2} \leq \frac{C}{1+k^2}$$

puisque $t \geq k$. Ensuite : pour tout $(x,a) \in \mathbb{R}+^2$, comme $k+x$ et $k+a$ appartiennent à l'intervalle I, on obtient d'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction g' que :

$$\left|g'(x+k) - g'(a+k)\right| \leqslant \frac{C}{(k+1)^2}.|(x+k)-(a+k)|$$

Bilan : $\boxed{\forall (x,a) \in \mathbb{R}_+^2,\ \forall k \in \mathbb{N},\ |g'(x+k) - g'(a+k)| \leqslant \frac{C|x-a|}{(k+1)^2}}$

ii. Pour tout $(x,a) \in (\mathbb{R}_+)^2$,

$$\begin{aligned}
|f(x) - f(a)| &= |-\sum_{k=0}^{+\infty} g'(x+k) + \sum_{k=0}^{+\infty} g'(a+k)| \\
&\leq \sum_{k=0}^{+\infty} |g'(x+k) - g'(a+k)| \text{ par inégalité triangulaire} \\
&\leq C.|x-a|.\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \text{ d'après la question précédente} \\
&\leq D.|x-a|
\end{aligned}$$

où $D = C.\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} \geq 0$ avec la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ qui est bien convergente (série de Riemann avec $\alpha = 2 > 1$).
Pour tout $a \in \mathbb{R}_+$ fixé, on a $\lim_{x \to a} D.|x-a| = 0$.
Donc par encadrement $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Par conséquent la fonction f est bien continue en a.

Bilan : $\boxed{\text{la fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+}$

(c) i. Pour tout $k \geqslant 1$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1} = \frac{1}{(t+k)(t+k+1)} \geq \frac{1}{(t+k+1)^2}$$

puisque $t+k+1 \geq t+k$.

Attention pour la suite il faut travailler avec des sommes partielles (sous peine de faire apparaître des séries divergentes !!).
Soit $M \in \mathbb{N}$ avec $M \geq N+1$. Alors

$$\begin{aligned}
|-\sum_{k=N+1}^{M} g'(t+k)| &\leq \sum_{k=N+1}^{M} |g'(t+k)| \text{ par inégalité triangulaire} \\
&\leq C.\sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{(t+k+1)^2} \\
&\leq C.\sum_{k=N+1}^{M} \frac{1}{t+k} - \frac{1}{t+k+1} \\
&\leq C.\left(\frac{1}{t+N+1} - \frac{1}{t+M+1}\right) \text{ par télescopage}
\end{aligned}$$

En passant à la limite quand $M \to +\infty$, on obtient alors

$$|R_N(t)| \leqslant \frac{C}{t+N+1} \leq \frac{C}{N+1}.$$

ii. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)dt &= \int_0^1 S_N(t)dt + \int_0^1 R_N(t)dt \\
&= -\sum_{k=0}^{N} \int_0^1 g'(t+k)dt + \int_0^1 R_N(t)dt \\
&= -\sum_{k=0}^{N} [g(t+k)]_0^1 + \int_0^1 R_N(t)dt \\
&= -\sum_{k=0}^{N} (g(k+1) - g(k)) + \int_0^1 R_N(t)dt \\
&= -g(N+1) + g(0) + \int_0^1 R_N(t)dt \text{ (télescopage)}
\end{aligned}$$

iii. Comme la série $\sum_{k \geq 0} g(k)$ converge, d'après le cours $\lim_{k \to +\infty} g(k) = 0$. Ensuite,

$$|\int_0^1 f(t)dt - g(0)| = |-g(N+1) + \int_0^1 R_N(t)dt| \leq |g(N+1)| + \int_0^1 |R_N(t)|dt$$

D'une part, $\lim_{N \to +\infty} g(N+1) = 0$. D'autre part, $\int_0^1 |R_N(t)|dt \leq \frac{C}{N+1}$ donc $\lim_{N \to +\infty} \int_0^1 |R_N(t)|dt = 0$.
Par encadrement $\int_0^1 f(t)dt - g(0) = 0$.

Bilan : $\boxed{\int_0^1 f(t)dt = g(0)}$

(d) i. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}
f(t+1) - f(t) &= -\sum_{k=0}^{+\infty} g'(t+k+1) + \sum_{k=0}^{+\infty} g'(t+k) \\
&= -\sum_{k=1}^{+\infty} g'(t+k) + \sum_{k=0}^{+\infty} g'(t+k) \text{ par changement d'indice} \\
&= g'(t)
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout x dans $\mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^x g'(t)dt = \int_0^x f(t+1) - f(t)dt \\
\Leftrightarrow\ & g(x) - g(0) = \int_0^x f(t+1)dt - \int_0^x f(t)dt \\
\Leftrightarrow\ & g(x) = g(0) + \int_1^{1+x} f(u)du + \int_x^0 f(t)dt \quad \text{via le CDV affine } u = 1+t \\
\Leftrightarrow\ & g(x) = \int_0^1 f(t)dt + \int_1^{1+x} f(t)dt + \int_x^0 f(t)dt \\
\Leftrightarrow\ & g(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt \quad \text{(Chasles)}
\end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{g(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt}$

ii. Pour tout entier $N \geqslant 0$, on pose $S_N = \int_0^N f(t)dt$. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{k=0}^{N-1} \int_k^{k+1} f(t)dt \quad \text{(Chasles)} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} g(k) \end{aligned}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $\lfloor x \rfloor \leq x \leq \lfloor x \rfloor + 1$ donc comme f est positive sur $\mathbb{R}_+$,

$$\int_0^{\lfloor x \rfloor} f(t)dt \leq \int_0^x f(t)dt \leq \int_0^{\lfloor x \rfloor+1} f(t)dt$$

d'où

$$S_{\lfloor x \rfloor} \leqslant \int_0^x f(t)dt \leqslant S_{\lfloor x \rfloor+1}$$

On a de plus

$$\lim_{x\to+\infty} S_{\lfloor x \rfloor} = \lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N-1} g(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} g(k) = 1$$

et de même $\lim_{x\to+\infty} S_{\lfloor x \rfloor+1} = 1$. Par encadrement,

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)dt = 1$$

On en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et $\int_0^{+\infty} f(t)dt = 1$.

iii. De plus f est nulle sur $\mathbb{R}_-$, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

Bilan : f est continue sur $]0;+\infty[$ et sur $]-\infty,0[$ donc sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0. De plus $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.

Donc $\boxed{f \text{ peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire } X}$

On a alors $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$ donc $X_d(\Omega) = \mathbb{N} = Y(\Omega)$. De plus pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X_d = k) = \int_k^{k+1} f(t)dt = g(k) = P(Y = k)$$

Bilan : $\boxed{\text{sa discrétisée } X_d \text{ suit la même loi que } Y}$

Bilan général de cette partie : les conditions données suffisent à assurer que la variable discrète Y est la discrétisée d'une variable à densité X.

Exercice 3 : étude d'un produit scalaire, matrice de Hilbert

Partie 1 : produit scalaire et polynômes de Legendre

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère les polynômes $P_k = X^k.(1-X)^k$ et $L_k = (P_k)^{(k)}$

1. - Pour tout $(P,Q) \in E^2$, la fonction $t \mapsto P(t).Q(t)$ est continue sur $[0,1]$.
   Donc $\langle P,Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) \cdot dt$ est bien défini. Ainsi $\langle .,. \rangle$ va bien de E^2 dans $\mathbb{R}$.
   - On montre très facilement que $\langle .,. \rangle$ est symétrique et bilinéaire (A FAIRE PROPREMENT !!)
   - Pour tout $P \in E$, $\langle P,P \rangle = \int_0^1 (P(t))^2 dt \geq 0$.
   De plus pour tout $P \in E$, si $\langle P,P \rangle = 0$ alors $\int_0^1 (P(t))^2 dt = 0$.
   La fonction $t \mapsto (P(t))^2$ étant continue et positive sur $[0,1]$, d'intégrale nulle, pour tout $t \in [0,1]$, $(P(t))^2 = 0$, donc $P(t) = 0$. Par conséquent le polynôme P a une infinité de racines (tous les réels de $[0,1]$), donc $P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Ainsi $\langle .,. \rangle$ est défini positif.
   - Bilan : $\langle .,. \rangle$ est une application bilinéaire symétrique définie positive donc un produit scalaire sur E.

2. Soit $(i,j) \in \mathbb{N}^2$

$$\langle X^i, X^j \rangle = \int_0^1 x^{i+j} dx = \frac{1}{i+j+1}$$

Dans la suite du problème $E = \mathbb{R}[X]$ est muni de ce produit scalaire $\langle .,. \rangle$.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$; on note $\|P\| = \sqrt{\langle P,P \rangle}$ la norme de P associée à ce produit scalaire.

3. (a) $P_0 = 1$ donc $L_0 = (P_0)^{(0)} = 1$.
$P_1 = X(1-X) = X - X^2$ donc $L_1 = (P_1)' = 1 - 2X$.
$P_2 = X^2(1-X)^2 = X^2 - 2X^3 + X^4$ donc $P_2' = 2X - 6X^2 + 4X^3$ puis

$$L_2 = P_2'' = 2 - 12X + 12X^2$$

L_0, L_1, L_2 sont respectivement de degrés 0, 1, 2.
La famille (L_0, L_1, L_2) est formée de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts, il s'agit donc d'une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$.
De plus $Card(L_0, L_1, L_2) = 3 = \dim \mathbb{R}_2[X]$ donc la famille (L_0, L_1, L_2) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
Ensuite, en exploitant la bilinéarité du produit scalaire,

$$\langle L_0, L_1 \rangle = \langle 1,1 \rangle - 2.\langle 1,X \rangle = 1 - 2.\frac{1}{2} = 0$$

$$\langle L_0, L_2 \rangle = 2.\langle 1,1 \rangle - 12.\langle 1,X \rangle + 12.\langle 1,X^2 \rangle = 2 - 12.\frac{1}{2} + 12.\frac{1}{3} = 2 - 6 + 4 = 0$$

$$\begin{aligned} \langle L_1, L_2 \rangle &= \langle 1, L_2 \rangle - 2.\langle X, L_2 \rangle = 0 - 2.(2.\langle X,1 \rangle - 12.\langle X,X \rangle + 12.\langle X,X^2 \rangle) \\ &= -2.(2.\frac{1}{2} - 12.\frac{1}{3} + 12.\frac{1}{4}) = -2.(1-4+3) = 0 \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{(L_0, L_1, L_2) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_2[\text{X}]}$

(b) D'après la question précédente, la famille (L_0, L_1) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_1[X]$.

$$\|L_0\| = \sqrt{\langle 1,1 \rangle} = 1$$

$$\|L_1\| = \sqrt{\langle 1-2X, 1-2X\rangle} = \sqrt{1-4.\langle 1,X\rangle + 4.\langle X,X\rangle} = \sqrt{1-2+\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$$

Posons $N_0 = L_0$ et $N_1 = \sqrt{3}.L_1$. Alors la famille $(N_0, N_1$ est une BON de $\mathbb{R}_1[X]$.

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a alors

$$p(P) = \langle P, N_0\rangle .N_0 + \langle P, N_1\rangle .N_1$$

Comme $1 \in \mathbb{R}_1[X]$ et $X \in \mathbb{R}_1[X]$, il est évident que $p(1) = 1$ et $p(X) = X$. Enfin,

$$\begin{aligned} p(X^2) &= \langle X^2, N_0\rangle .N_0 + \langle X^2, N_1\rangle .N_1 \\ &= \langle X^2, 1\rangle .1 + 3.\langle X^2, 1-2X\rangle .(1-2X) \\ &= \frac{1}{3} + 3.(\frac{1}{3} - 2.\frac{1}{4}).(1-2X) \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2}.(1-2X) \\ &= -\frac{1}{6} + X \end{aligned}$$

D'où en notant $\mathcal{C} = (1, X, X^2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$,

$$\Delta = Mat_{\mathcal{C}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

(a) $deg(P_k) = 2k$, d'où en dérivant k fois : $deg(L_k) = k$. De plus, P_k a pour coefficient dominant $(-1)^k.X^{2k}$. En dérivant k fois, on trouve que L_k a pour coefficient dominant $(-1)^k.\frac{(2k)!}{k!}$.

(b) Le polynôme P_k a pour racines 0 et 1, qui sont toutes les deux des racines d'ordre k. D'après la caractérisation des racines d'ordre k, on peut bien dire que :

$$\forall i \in [[0; k-1]], (P_k)^{(i)}(0) = (P_k)^{(i)}(1) = 0$$

(c) D'après la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned} L_k &= (P_k)^{(k)} = (X^k.(1-X)^k)^{(k)} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}.(X^k)^{(j)}.((1-X)^k)^{(k-j)} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}.\frac{k!}{(k-j)!}.X^{k-j}.(-1)^{k-j}.\frac{k!}{j!}.(1-X)^j \\ &= k!.(-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}.\frac{k!}{j!.(k-j)!}.(-1)^{-j}.X^{k-j}.(1-X)^j \\ &= k!\ .(-1)^k \cdot \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \cdot X^{k-j} \cdot (X-1)^j \end{aligned}$$

On en déduit que

$$L_k(0) = k!\ .(-1)^k \cdot \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \cdot 0^{k-j} \cdot (-1)^j = k!.(-1)^k.(-1)^k = k! \text{ (il ne reste que le terme en } j=k)$$

$$L_k(1) = k!\ .(-1)^k \cdot \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}^2 \cdot 1^{k-j} \cdot 0^j = k!\ .(-1)^k \text{ (un seul terme non nul)}$$

5. (a) Formule **"d'intégration par parties généralisée"**.

Soit pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la propriété :

$\mathcal{H}(k)$: $\forall (f,g) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})^2$,

$$\int_0^1 f(t)g^{(k)}(\mathrm{t}) \cdot \mathrm{d}t = \left[\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \cdot f^{(j)}(t) g^{(k-j-1)}(t)\right]_0^1 + (-1)^k \int_0^1 f^{(k)}(\mathrm{t}) \cdot g(t)dt$$

- <u>Initialisation :</u> si $k=1$, la relation est vraie car on reconnait la formule d'intégration par parties :

$$\int_0^1 f(t).g'(t)dt = [f(t).g(t)]_0^1 - \int_0^1 f'(t).g(t)dt$$

- <u>Hérédité :</u> soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}(k)$ est vraie. Soit f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. On calcule alors $\int_0^1 f(t)g^{(k+1)}(\mathrm{t}) \cdot dt$ en intégrant par parties : on pose

$$\left\{\begin{array}{l} u(t) = f(t) \\ v'(t) = g^{(k+1)}(t) \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} u'(t) = f'(t) \\ v(t) = g^{(k)}(t) \end{array}\right.$$

et par IPP, les fonctions u et v étant bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$,

$$\int_0^1 f(t)g^{(k+1)}(t)dt = [f(t).g^{(k)}(t)]_0^1 - \int_0^1 f'(t).g^{(k)}(t)dt$$

On applique ensuite l'hypothèse de récurrence $\mathcal{H}(k)$ aux fonctions f' et g, et on obtient en remplaçant :

$$\begin{aligned} &\int_0^1 f(t)g^{(k+1)}(t)dt \\ &= [f(t).g^{(k)}(t)]_0^1 - \left[\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \cdot f^{(j+1)}(t) g^{(k-j-1)}(t)\right]_0^1 - (-1)^k \int_0^1 f^{(k+1)}(\mathrm{t}) \cdot g(t)dt \\ &= [f(t).g^{(k)}(t)]_0^1 + \left[\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j+1} \cdot f^{(j+1)}(t) g^{(k-j-1)}(t)\right]_0^1 + (-1)^{k+1}.\int_0^1 f^{(k+1)}(\mathrm{t}) \cdot g(t)dt \\ &= [f(t).g^{(k)}(t)]_0^1 + \left[\sum_{i=1}^{k} (-1)^i \cdot f^{(i)}(t) g^{(k-i)}(t)\right]_0^1 + (-1)^{k+1}.\int_0^1 f^{(k+1)}(\mathrm{t}) \cdot g(t)dt \\ &= \left[\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot f^{(i)}(t) g^{(k-i)}(t)\right]_0^1 + (-1)^{k+1}.\int_0^1 f^{(k+1)}(\mathrm{t}) \cdot g(t)dt \end{aligned}$$

donc la propriété $\mathcal{H}(k+1)$ est vérifiée.

- On en déduit le résultat par principe de récurrence !

(b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$. Alors

$$\begin{aligned} \langle P, L_k\rangle &= \int_0^1 P(t).L_k(t)dt \\ &= \int_0^1 P(t).(P_k)^{(k)}(t)dt \\ &= \left[\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \cdot P^{(j)}(t)(P_k)^{(k-j-1)}(t)\right]_0^1 + (-1)^k \int_0^1 P^{(k)}(t).P_k(t)dt \end{aligned}$$

D'une part, comme $\deg(P) \leq k-1$, on a $P^{(k)} = 0_{\mathbb{R}[x]}$ donc la dernière intégrale ci-dessus est nulle.
D'autre part, $\forall i \in [[0; k-1]]$, $(P_k)^{(i)}(0) = (P_k)^{(i)}(1) = 0$. On en déduit aisément que tous les termes dans le crochet ci-dessus sont nuls.

Bilan : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall P \in \mathbb{R}_{k-1}[\mathrm{X}], \quad \langle P, L_k \rangle = 0}$

6. La famille $(L_0, \cdots, L_n)$ est une famille formée de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts, elle est donc libre. Comme $Card(L_0, \cdots, L_n) = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$, il s'agit d'une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Enfin, soit $(i,j) \in [[0,n]]^2$ avec $i \neq j$. Supposons par exemple que $i < j$. Alors comme $deg(L_i) = i$, on a $L_i \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$ donc $\langle L_i, L_j \rangle = 0$ d'après la question précédente.

Bilan : $\boxed{(L_0, L_1, \ldots, L_n) \text{ est une base orthogonale de } \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]}$

Partie 2 : étude de la matrice de Hilbert.

7. Python

```
import numpy as np
def H(n):
    H=np.zeros([n,n])
    for i in range(0,n):
        for j in range(0,n):
            H[i,j]=1/(i+j+1)
    return H
```

8. (a) La matrice H_n est symétrique donc diagonalisable dans une base orthonormée : il existe bien une matrice orthogonale $R_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et d'une matrice diagonale $D_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ notée $D_n = Diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ telles que $H_n = R_n \cdot D_n \cdot {}^tR_n$
On note u_n la plus petite des valeurs propres et v_n la plus grande des valeurs propres de H_n.

(b) Cas particulier $n = 2$.

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \lambda \in Sp(H_2) &\Leftrightarrow H_2 - \lambda.I_2 \text{ non inversible} \\ &\Leftrightarrow det(H_2 - \lambda.I_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow (1-\lambda).(\frac{1}{3} - \lambda) - \frac{1}{4} = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - \frac{4}{3}.\lambda + \frac{1}{12} = 0 \end{aligned}$$

$\Delta = \frac{16}{9} - \frac{1}{3} = \frac{13}{9}$ d'où deux solutions :

$$\lambda_1 = \frac{\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{13}}{3}}{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{\frac{4}{3} + \frac{\sqrt{13}}{3}}{2}$$

Bilan : $\boxed{Sp(H_2) = \{\frac{4-\sqrt{13}}{6}, \frac{4+\sqrt{13}}{6}\}}$

On a donc $u_2 = \frac{4-\sqrt{5}}{6}$ et $v_2 = \frac{4+\sqrt{5}}{6}$.

9. Soit $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ où $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cdot X^k$.

(a)

$$\begin{aligned} \int_0^1 (P(t))^2 \, dt &= \left\langle \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot X^i, \sum_{j=0}^{n-1} a_j \cdot X^j \right\rangle = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} a_i.a_j. \langle X^i, X^j \rangle \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} a_i.a_j. \frac{1}{i+j+1} = {}^tA.H_n.A \end{aligned}$$

en reconnaissant la forme quadratique associée à la matrice H_n.

(b) Le résultat précédent montre que pour toute matrice colonne A, on a ${}^tA.H_n.A \geq 0$.
Soit λ une valeur propre de H_n. Dans cette question uniquement on note $A \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de H_n associé à λ : $H_n.A = \lambda.A$ avec $A \neq 0$. Alors

$${}^tA.H_n.A \geq 0 \Leftrightarrow \lambda.{}^tA.A \geq 0 \Leftrightarrow \lambda.\|A\|^2 \geq 0 \Leftrightarrow \lambda \geq 0$$

en effet, comme $A \neq 0$, on a $\|A\| > 0$.
Les valeurs propres de H_n sont donc toutes positives.
De plus supposons que $\lambda = 0$. Alors on aurait ${}^tA.H_n.A = 0$ donc $\int_0^1 (P(t))^2 dt = 0$ avec les notations ci-dessus, donc $\|P\|^2 = 0 \Leftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}[X]}$. Comme un polynôme est nul ssi ses coordonnées sont nulles, $a_0 = \cdots = a_n = 0$, donc $A = 0$: absurde car A est un vecteur propre.
Donc $\lambda = 0$ n'est pas valeur propre de H_2.

Bilan : $\boxed{Sp(H_n) \subset]0; +\infty[}$

Remarque : on en déduit en particulier que H_n est inversible.

(c) On note $C = {}^tR_n \cdot A$.
On a alors

$${}^tA.H_n.A = {}^tA.R_n \cdot D_n \cdot {}^tR_n.A = {}^tC.D_n.C = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k.c_k^2$$

en reconnaissant par exemple la forme quadratique associée à D_n (on peut aussi calculer le produit !!!). De plus, pour tout $k \in [[1,n]]$, $u_n = \lambda_1 \leq \lambda_k \leq \lambda_n = v_n$, d'où

$$u_n \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq {}^tA.H_n.A \leq v_n \sum_{k=1}^{n} c_k^2$$

Mais par ailleurs,

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 = {}^tC.C = {}^tA.R_n.{}^tR_n.A = {}^tA.A$$

car R_n est une matrice orthogonale. Finalement, on a bien :

$$u_n \cdot {}^tA \cdot A \leq {}^tA \cdot H_n \cdot A \leq v_n \cdot {}^tA \cdot A$$

10. Etude de la suite (u_n)

(a) *Grand classique d'analyse !!!*
A savoir faire les yeux fermés

Soit $k \in [[1,+\infty[[$. Pour tout $t \in [k,k+1]$, on a $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ d'où en intégrant sur $[k,k+1]$, par croissance de l'intégrale (bornes bon sens) :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t}dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k}dt$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

Sommons d'une part l'inégalité de droite pour k variant de 1 à n : par télescopage,

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

D'autre part, sommons l'inégalité de gauche pour k variant de 1 à $n-1$: par télescopage,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \ln(n) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 1 \leq \ln(n)$$

On obtient ainsi l'encadrement: $\forall n \geq 1$,

$$\ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq ln(n) + 1$$

D'où pour tout $n \geq 2$:

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \leq \frac{1}{\ln(n)}.\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

Comme

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{\ln(n) + \ln(1+1/n)}{\ln(n)} = 1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \to_{n\to+\infty} 1$$

et $\lim_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{\ln(n)} = 1$, on obtient bien le résultat souhaité.

Bilan : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)}$

(b) On note $\mathrm{Tr}\,(H_n)$ la trace de H_n. Soit $n \geq 2$.
Tout d'abord, comme deux matrices semblables ont la même trace,

$$\mathrm{Tr}\,(H_n) = \mathrm{Tr}\,(D_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \geq \sum_{k=1}^{n} u_n = n.u_n$$

puisque u_n est la plus petite des valeurs propres. D'autre part,

$$\mathrm{Tr}\,(H_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} \leq \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Bilan : $\boxed{n.u_n \leq \mathrm{Tr}\,(H_n) \leq \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}}$

(c) On en déduit que pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Or

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \sim_{n\to+\infty} \ln(2n) = \ln(2) + \ln(n) \sim_{n\to+\infty} \ln(n)$$

Donc $\frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \sim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} \to_{n\to+\infty} 0$.
D'où le résultat par encadrement :
Bilan : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

11. Monotonie de la suite (v_n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de H_n associé à v_n.

On note également $B = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$.

(a) Comme ci-dessus, on trouve de façon immédiate que ${}^tA.H_n.A = v_n \cdot {}^tA.A$.

(b) D'après le 9.a),
$$ {}^tB \cdot H_{n+1} \cdot B = \int_0^1 (P(t))^2 dt = {}^tA \cdot H_n \cdot A$$
car les deux matrices colonnes A et B ont le même polynôme P associé.

(c) On a alors :
$$v_n.{}^tA.A = {}^tB \cdot H_{n+1} \cdot B \leq v_{n+1}.{}^tB.B$$
d'après le résultat du 9.c). Or ${}^tA.A = \|A\|^2 = \|B\|^2 = {}^tB.B$. D'où comme $\|A\| > 0$ (A vecteur propre non nul), on obtient bien que : $v_n \leq v_{n+1}$.

Bilan : $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est croissante}}$

Remarque : on peut démontrer que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge vers π, mais cela demande encore du travail !!

Remarque bis : sujet plutôt dur, long, pas beaucoup de Python...
Exercice 1 sur les suites implicites assez classique : théorème de la bijection, comparaison de u_n et u_{n+1} via le signe de $f_n(u_{n+1})$... mais la fin de ce type d'exercice est toujouts assez astucieuse (il ne faut pas tourner en rond !).
Pb Ecricome sur la notion de discrétisée d'une variable à densité très intéressant (j'ai raccourci en enlevant une partie qui portait sur les polynômes).

Pb d'algèbre : le produit scalaire est dans le cours, la suite des polynômes de Legendre est classique mais pas la plus simple à étudier ! Matrice de Hilbert classique aussi (cf ex. sur les formes quadratiques).