Corrigé CB2 Maths II 2019 (adapté du corrigé Espace Prépas)

Corrigé un peu succinct mais il y a tout.

Partie I. Fonction logistique et lois logistiques

1. (a) On voit immédiatement que Λ est à valeurs dans $]0,1[$.
Soit $y \in]0,1[$. Montrons qu'il existe un unique réel x tel que $\Lambda(x)=y$.
En effet $\Lambda(x)=y \Longleftrightarrow 1+\mathrm{e}^{-x}=\frac{1}{y} \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-x}=\frac{1-y}{y}$ et par bijectivité de la fonction exponentielle,
$$\mathrm{e}^{-x}=\frac{1-y}{y} \Longleftrightarrow -x=\ln\left(\frac{1-y}{y}\right) \Longleftrightarrow x=\ln\left(\frac{y}{1-y}\right)$$
Ceci prouve l'existence et l'unicité de x pour tout $y \in]0,1[$.
Ainsi
$$\Lambda \text{ est bijective de } \mathbb{R} \text{ dans }]0,1[\text{ et pour tout } x \in]0,1[, L(x)=\ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$$
Remarque : on pouvait aussi commencer par utiliser le théorème de la bijection monotone pour justifier la bijectivité.

(b) Λ est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ d'après les théorèmes sur les opérations sur les fonctions dérivables et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Lambda'(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$.

(c) La fonction $f: x \mapsto x-\Lambda(x)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x)=1-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}=\frac{1+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-2x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} \text{ d'où } \quad f'(x)>0$$
Elle est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, d'après les limites de Λ en $-\infty$ et $+\infty$, $\lim_{-\infty} f=-\infty$ et $\lim_{+\infty} f=+\infty$. D'après le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même. Il existe alors un unique réel x_0 tel que $f(x_0)=0$ i.e. il existe un unique réel x_0 tel que $\Lambda(x_0)=x_0$.

(d) D'après le calcul réalisé précédemment, on remarque que, pour tout x réel,
$0 \leqslant f'(x) \leqslant 1$. 1 est un majorant de $|f'|$ sur $\mathbb{R}$, on peut alors en appliquant l'inégalité des accroissements finis, en déduire l'inégalité, $\forall x \in \mathbb{R}$:
$$|f(x)-f(x_0)| \leqslant |x-x_0| \quad \text{i.e } |\Lambda(x)-x| \leqslant |x-x_0| \text{ car } f(x_0)=0.$$

2. (a) On a $\Lambda(0)=\frac{1}{2}$ donc $\Lambda(0)>0$ et $\Lambda(1)=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{-1}}$ d'où $\Lambda(1)<1$. On a alors $x_0 \in]0,1[$ ce qui justifie les lignes (2) et (3).
On remplace les premiers pointillés par $a=c$ et les seconds par $b=c$ suivant la méthode de dichotomie.

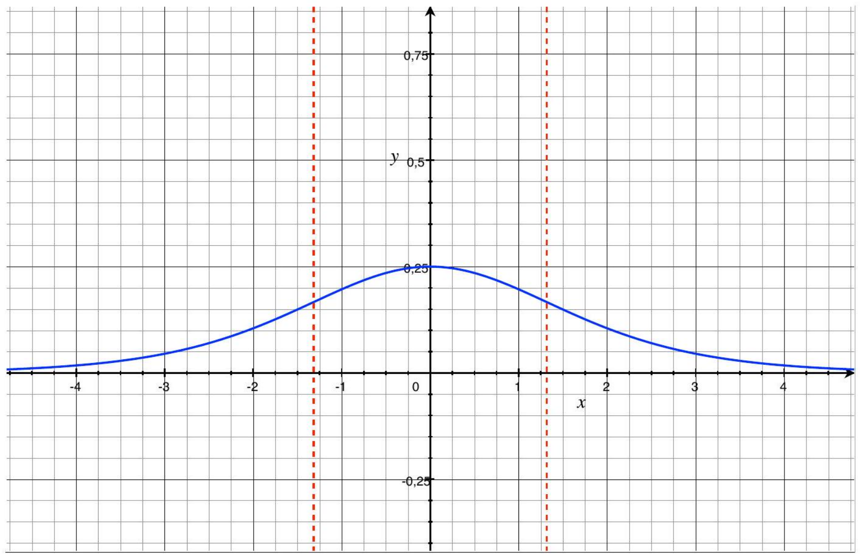
(b) La valeur maximale est 2.10^{-4} puisque lorsque la boucle se termine, le segment d'extrémité a et b contient x_0 et est de longueur inférieure à eps, le milieu de ce segment est alors distant de x_0 d'au plus eps/2.

(c) D'après la question 1.d)
en valeur absolue cette valeur est inférieure à eps/2.

3. Rappelons que, pour tout $x \in \mathbb{R}, \lambda(x)=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$.

(a) Montrons les trois propriétés qui assurent que λ est une densité de probabilité.
— Il est évident que λ est à valeurs positives.
— Il est immédiat que λ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.
— Montrons pour finir que $I=\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut 1 .
Cette intégrale est impropre en $-\infty$ et $+\infty$ et Λ est une primitive qui admet en chacune de ses bornes une limite finie. On peut alors en conclure que l'intégrale I est convergente et $I=\lim_{x\to+\infty}\Lambda(x)-\lim_{x\to-\infty}\Lambda(x)=1-0=1$.
Ainsi λ est bien une densité de probabilité.

(b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$\lambda(-x)=\frac{\mathrm{e}^{x}}{(1+\mathrm{e}^{x})^2}=\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{2x}(\mathrm{e}^{-x}+1)^2}=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(\mathrm{e}^{-x}+1)^2}=\lambda(x)$. Ainsi λ est paire.
Pour tout $x \in \mathbb{R}, \lambda(x)=u(\mathrm{e}^{-x})$ où u est la fonction définie et dérivable pour $t \in \mathbb{R}^+$ par $u(t)=\frac{t}{(1+t)^2}$.
Or pour tout $t \geqslant 0, u'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}-2\frac{t}{(1+t)^3}=\frac{1-t}{(1+t)^3}$ D'où $\lambda'(x)=-e^{-x}\frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^3}$.
On en déduit que $\lambda'(x)$ est du même signe que $\mathrm{e}^{-x}-1$, soit positive sur $\mathbb{R}^-$et négative sur $\mathbb{R}^+$.
λ est croissante sur $\mathbb{R}^-$et décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
Pour les points d'inflexion, il faudrait calculer la dérivée seconde. On procède de même en posant pour t positif, $v(t)=\frac{t-t^2}{(1+t)^3}$.
On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}, \lambda''(x)=\mathrm{e}^{-x}v'(\mathrm{e}^{-x})$.
Par un calcul classique $v'(t)=\frac{t^2-4t+1}{(1+t)^4} \cdot v'$ s'annule en changeant de signe aux racines du numérateur i.e. pour $t=2+\sqrt{3}$ et $t=2-\sqrt{3}$. Ainsi λ'' s'annule en changeant de signe pour
$x=-\ln(2+\sqrt{3})$ et $x=-\ln(2-\sqrt{3})$ qui sont donc les points d'inflexion de la courbe de λ.
Voici la courbe :



4. (a) Soit Z une variable suivant la loi logistique standard. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrons que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^k.\lambda(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k.\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}dx$ est (absolument) convergente. Tout d'abord, comme la fonction λ est paire, la fonction $x \mapsto x^k.\lambda(x)$ est paire si k est paire et impaire si k est impair. Dans les deux cas, il suffit de montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} x^k.\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$. La fonction à l'intérieur de l'intégrale étant continue sur $[0;+\infty[$, cette intégrale est impropre en $+\infty$. On remarque que

$$x^k.\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2} \sim_{x\to+\infty} x^k.e^{-x}$$

Comme l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^k.e^{-x}dx = \Gamma(k+1)$ est convergente, par critère d'équivalence pour les intégrales des fonctions positives, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^k.\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$ converge.

Bilan : $\boxed{Z \text{ admet un moment à n'importe quel ordre } k}$

De plus, comme la fonction $x \mapsto x.\lambda(x)$ est impaire, on trouve que $\boxed{E(Z)=0}$

(b) Soit Y qui suit la loi logistique $\mathcal{L}(r,s)$. $Y = sZ + r$ où Z suit la loi logistique standard. Comme Z admet une espérance, il en est de même pour Y et par linéarité de l'espérance $\boxed{\mathbf{E}(Y) = s\mathbf{E}(Z) + r = r}$

(c) Puisque L est la fonction réciproque de Λ la fonction de répartition de la loi logistique standard, alors si U suit la loi uniforme sur $]0,1[$, d'après la méthode d'inversion $L(U)$ suit la loi logistique standard, puis $sL(U)+r$ la loi $\mathcal{L}(r,s)$. D'où la fonction :

```
def randlogis(n,p,r,s):
    U=rd.random([n,p])
    S=s*np.log(U./(1-U))+r
    return S
```

(d) Puisque la loi logistique standard $\mathcal{L}(0,1)$ admet un moment d'ordre 4 , on sait par la loi faible des grands nombres, que si $(Y_1,\ldots,Y_n)$ est un échantillon de cette loi $\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^n Y_k^2\right)$ est un estimateur convergent du moment d'ordre 2 de cette loi. D'où, puisque cette loi est centrée, pour n assez grand, on peut raisonnablement penser que $\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^n Y_k^2\right)$ est très probablement une valeur approchée de la variance de la loi $\mathcal{L}(0,1)$.
La fonction Python précédente fournit un échantillon de taille n de cette loi avec l'instruction `randlogis(n, 1,1,0)`.
Donc lorsque n est assez grand,

```
ech=randlogis(n,1,0,1)
V=np.mean(ech**2)
```

place dans la variable `V` une valeur approchée de la variance de la loi $\mathcal{L}(0,1)$

5. (a) Par définition, $Z = \ln(U_1) - \ln(U_2)$. Déterminons la loi de $\ln(U_1)$. Pour tout x réel,

$$\mathbf{P}([\ln(U_1) \leqslant x]) = \mathbf{P}([U_1 \leqslant \mathrm{e}^x]) = 1 - \exp(-\mathrm{e}^x)$$

D'où une densité $f_{\ln(U_1)}$ de $\ln(U_1)$ s'obtient par dérivation de sa fonction de répartition qui est C^1 sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_{\ln(U_1)}(x) = \mathrm{e}^x \exp(-\mathrm{e}^x) = \exp(x - \mathrm{e}^x)$.
$\ln(U_2)$ suit la même loi que $\ln(U_1)$ d'où un densité de $-\ln(U_2)$ est $x \mapsto f_{\ln(U_1)}(-x)$.
D'après le lemme des coalitions, $\ln(U_1)$ et $-\ln(U_2)$ sont indépendantes et $f_{\ln(U_1)}$ est bornée par 1 ($x - \mathrm{e}^x < 0$). D'où la formule de convolution s'applique pour la loi de $\ln(U_1) - \ln(U_2)$ i.e. une densité h est définie par, pour tout x réel :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\ln(U_1)}(x-t) f_{\ln(U_2}(-t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(x - t - \mathrm{e}^{x-t}\right)\exp\left(-t - \mathrm{e}^{t}\right)\mathrm{d}t$$

d'où

$$h(x) = \mathrm{e}^x \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-2t}\exp\left(-\left(1+\mathrm{e}^x\right)\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t$$

Le changement de variable $y = \mathrm{e}^{-t}$ bijectif décroissant, de classe C^1 de $\mathbb{R}$ sur $]0,+\infty[$ peut être réalisé. $dy = -\mathrm{e}^{-t}dt$ d'où
$h(x) = \mathrm{e}^x \int_{+\infty}^0 -y\exp\left(-\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)y\right)(-1)\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} y\exp\left(-\left(1+\mathrm{e}^x\right)y\right)\mathrm{d}y$.
Or $\int_0^{+\infty} y\left(1+\mathrm{e}^x\right)\exp\left(-\left(1+\mathrm{e}^x\right)y\right)\mathrm{d}y$ est l'espérance de la loi $\mathcal{E}\left(\left(1+\mathrm{e}^x\right)\right)$ donc elle vaut $\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$. D'où $h(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2} = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}$ ce qui achève la démonstration. $\ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right)$ suit la loi $\mathcal{L}(0,1)$.

(b) Pour simuler une variable aléatoire suivant la loi logistique standard on peut programmer directement

```
Z=np.log(rd.exponential(1)/rd.exponential(1))
```

Partie II. Variance de la loi logistique standard

6. (a) Z est centrée donc $\mathbf{V}(Z) = \mathbf{E}\left(Z^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\,\mathrm{d}x$.
Par parité de la fonction intégrée, $\mathbf{V}(Z) = 2\int_0^{+\infty} x^2\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\,\mathrm{d}x$
On réalise une intégration par parties sur $[0,A]$ où $A > 0$ en posant $u(x) = x^2$ et $v(x) = \Lambda(x) - 1$:

$$\int_0^A 2x^2 \frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\,\mathrm{d}x = \left[2x^2(\Lambda(x)-1)\right]_0^A - \int_0^A 4x(\Lambda(x)-1)\mathrm{d}x$$

i.e.

$$\int_0^A 2x^2\frac{\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\,\mathrm{d}x = \left[2x^2\frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+e^{-x}}\right]_0^A - \int_0^A 4x\frac{-\mathrm{e}^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = 2A^2\frac{\mathrm{e}^{-A}}{1+\mathrm{e}^{-A}} + 4\int_0^A \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

Quand $A \to +\infty$, $\frac{\mathrm{e}^{-A}}{1+\mathrm{e}^{-A}} \sim \mathrm{e}^{-A}$, d'où $2A^2\frac{\mathrm{e}^{-A}}{1+\mathrm{e}^{-A}} \to 0$ et ainsi $4\int_0^A \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x \to \mathbf{V}(Z)$.
Ce qui donne la relation

$$\mathbf{V}(Z) = 4\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+e^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

(b) Par linéarité de l'intégrale, $\sum_{k=0}^n(-1)^k\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-(k+1)x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\sum_{k=0}^n(-1)^k\mathrm{e}^{-(k+1)x}\Big)\,\mathrm{d}x$.
Or pour tout $x \in \Big[0,+\infty\Big[$, $\sum_{k=0}^n(-1)^k\mathrm{e}^{-(k+1)x} = \mathrm{e}^{-x}\sum_{k=0}^n\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)^k$.
D'après la formule de la progression géométrique,

$$\sum_{k=0}^n\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)^k = \frac{1-\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)^{n+1}}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{1+(-1)^n\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}$$

puisque $-\mathrm{e}^{-x} \neq 1$. D'où :
$\sum_{k=0}^n(-1)^k\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-(k+1)x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\frac{1+(-1)^n\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} + (-1)^n\frac{x\mathrm{e}^{-(n+2)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\Big)\,\mathrm{d}x$
De plus $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}} + (-1)^n\frac{x\mathrm{e}^{-(n+2)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty}(-1)^n\frac{x\mathrm{e}^{-(n+2)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$ puisque ces deux intégrales sont bien convergentes.

Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-(k+1)x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x+(-1)^n\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-(n+2)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

qui donne l'égalité demandée en faisant passer le dernier terme dans le membre de gauche.

(c) Pour tout x positif, $0\leqslant \frac{x\mathrm{e}^{-(n+2)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\leqslant x\mathrm{e}^{-(n+2)x}$.
D'où par croissance de l'intégrale, $0\leqslant \int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-(n+2)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-(n+2)x}\,\mathrm{d}x$, sachant que cette dernière intégrale converge puisque qu'elle est proportionnelle à l'espérance de la loi $\mathcal{E}(n+2)$.
Cette dernière information nous montre aussi que $\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-(n+2)x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{(n+2)^2}$, ce qui prouve via le théorème des gendarmes que $\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-(n+2)x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x\to 0$ quand $n\to+\infty$. On n'a alors aucune difficulté pour en déduire que

$$I_n\to 0 \text{ quand } n\to+\infty$$

On en déduit que, quand $n\to+\infty, \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-(k+1)x}\,\mathrm{d}x\to\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$.
On vient de voir que $\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-(k+1)x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{(k+1)^2}$, ainsi $n\to+\infty, \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{(k+1)^2}\to\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$ ce qui revient à dire que

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}=\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,\mathrm{d}x$$

(d) On peut écrire l'égalité : $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$.
Or $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^{k-1}}{k^2}=\sum_{k\text{ pair}}\frac{2}{k^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{4k^2}=\frac{\pi^2}{12}$, d'où $\frac{\pi^2}{6}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}$ i.e. $\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}=\frac{\pi^2}{12}$.
On déduit des questions qui précèdent que

$$V(Z)=4\times\frac{\pi^2}{12}=\frac{\pi^2}{3}$$

7. Ces deux intégrales sont impropres en 0 et $+\infty$.
   - En $+\infty$, les deux fonctions sont à valeurs positives et négligeables devant $\frac{1}{x^2}$ puisque négligeables devant $x\mathrm{e}^{-x}$, elle même négligeable devant $\frac{1}{x^2}$. On en déduit la convergence de ces intégrales en $+\infty$ par comparaison avec l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$.
   - En zéro, $\ln(x)\mathrm{e}^{-x}\sim\ln(x)$ et $(\ln(x))^2\mathrm{e}^{-x}\sim(\ln(x))^2$ qui sont négligeables devant $\frac{1}{\sqrt{x}}$. Sachant que $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ converge, on en déduit l'absolue convergence de ces intégrales par comparaison.

   Finalement ces deux intégrales sont bien convergentes.
8. Le théorème de transfert nous permet d'affirmer que ces deux intégrales sont, respectivement, l'espérance et le moment d'ordre 2 d'une variable aléatoire de la forme $\ln(U), U$ étant une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi par la formule de Huyghens, $J-I^2$ est la variance d'une telle variable aléatoire.
   Or on a vu que si U_1 et U_2 sont indépendantes et suivent la loi exponentielle de paramètre 1 , alors $\ln(U_1)-\ln(U_2)$ suit la loi $\mathcal{L}(0,1)$. On a donc $\mathbf{V}(\ln(U_1)-\ln(U_2))=\frac{\pi^2}{3}$.
   Mais par le théorème des coalitions, $\ln(U_1)$ et $-\ln(U_2)$ sont indépendantes, d'où

$$\mathbf{V}(\ln(U_1)-\ln(U_2))=\mathbf{V}(\ln(U_1))+\mathbf{V}(-\ln(U_2))=\mathbf{V}(\ln(U_1))+\mathbf{V}(\ln(U_2))=2\mathbf{V}(\ln(U_1))$$

   Ainsi $\mathbf{V}(\ln(U_1))=\frac{\pi^2}{6}$ d'où $J-I^2=\frac{\pi^2}{6}$.

Partie III. Estimation à partir de données binaires

9. Puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ alors F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $F'=f>0$, donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   On a aussi, $\lim_{-\infty}F=0, \lim_{+\infty}F=1, F$ est continue sur $\mathbb{R}$ alors, d'après le théorème de la bijection, F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$.
10. La suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires :
   - de même loi,
   - indépendantes, de même espérance $F(\theta)$,
   - de même variance $F(\theta)(1-F(\theta))$ (non nulle).

   On peut alors appliquer le théorème central limite :
   $\frac{\sqrt{n}\left(\overline{Y_n}-F(\theta)\right)}{\sqrt{F(\theta)(1-F(\theta))}}$ converge en loi, quand $n\to+\infty$, vers une variable aléatoire N qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

   Comme la fonction $f: x\mapsto\sqrt{F(\theta).(1-F(\theta))}.x$ est continue sur $\mathbb{R}$, d'après le cours,

$$\sqrt{n}\left(\overline{Y_n}-F(\theta)\right)\text{ converge en loi vers }\sqrt{F(\theta)(1-F(\theta))}.N$$

   et par stabilité de la loi normale par transformation affine, cette dernière variable suit la loi $\mathcal{N}(0,F(\theta)(1-F(\theta)))$
11. (a) On a $\mathbf{P}_\theta(E_\theta)=\mathbf{P}_\theta([0<\sum_{k=1}^{n}Y_k<n])$. Posons $S_n=\sum_{k=1}^{n}Y_k$.
   S_n suit la loi binomiale de paramètres n et $F(\theta)$ puisque les Y_k sont indépendantes en suivant la loi $\mathcal{B}(F(\theta))$. D'où : $S_n(\Omega)=[[0,n]]$ et par conséquent

$$\mathbf{P}_\theta([0<S_n<n])=1-\mathbf{P}_\theta([S_n=0])-\mathbf{P}_\theta([S_n=n])=1-(1-F(\theta))^n-(F(\theta))^n$$

   Sachant que $0<F(\theta)<1$, on en déduit aisément que $(1-F(\theta))^n\to0$ et $(F(\theta))^n\to0$ quand $n\to+\infty$. Donc $\mathbf{P}_\theta(E_\theta)\to1$ quand $n\to+\infty$.

   (b) Procédons par double inclusion :
   i. - Soit $\omega\in E_n$, tel que $T_n(\omega)\leq x$. Alors $T_n(\omega)=F^{-1}\left(\overline{Y_n}(\omega)\right)$, et donc comme $T_n(\omega)\leqslant x$ par composition par F strictement croissante, $\overline{Y_n}(\omega)\leqslant F(x)$. Ainsi $\omega\in\left[\overline{Y_n}\leqslant F(x)\right]\cap E_n$.
   — Si $\omega\in\left[\overline{Y_n}\leqslant F(x)\right]\cap E_n$, alors $\omega\in E_n$ et $T_n(\omega)=F^{-1}\left(\overline{Y_n}(\omega)\right)$ par croissance de $F^{-1}, T_n(\omega)\leqslant F^{-1}(F(x))$ i.e. $T_n(\omega)\leqslant x$.
   On a bien l'égalité ensembliste proposée.

   ii. Cela découle de ce que l'on vient de voir. On a dans tous les cas :

$$\left[\overline{Y_n}\leqslant F(x)\right]\cap E_n\subset[T_n\leqslant x]\subset\left(\left[\overline{Y_n}\leqslant F(x)\right]\cap E_n\right)\cup\overline{E_n}$$

   La croissance de $\mathbf{P}_\theta$ et l'inégalité de Boole montrent que

$$\mathbf{P}_\theta\left(\left[\overline{Y_n}\leqslant F(x)\right]\right)\cap E_n)\leqslant\mathbf{P}_\theta([T_n\leqslant x])\leqslant\mathbf{P}_\theta\left(\left[\overline{Y_n}\leqslant F(x)\right]\cap E_n\right)+\underbrace{\mathbf{P}_\theta\left(\overline{E_n}\right)}_{=1-\mathbf{P}_\theta(E_n)}$$

   Remarque : **inégalité de Boole** : pour tous événements A et B, d'après la formule du crible $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\leq P(A)+P(B)$. L'inégalité $P(A\cup B)\leq P(A)+P(B)$ est appelée inégalité de Boole.

(c) D'après la loi faible des grands nombres $\overline{Y_n} \xrightarrow{\mathbf{P}} F(\theta)$ quand $n \to +\infty$.

— Si $x > \theta, F(x) > F(\theta)$, d'où $\mathbf{P}_\theta\left(\left[\overline{Y_n} \leqslant F(x)\right]\right) \to 1$ quand $n \to +\infty$.
Sachant que $\mathbf{P}_\theta\left(E_n\right) \to 1$ quand $n \to +\infty$, que forcément $\mathbf{P}_\theta\left(\left[\overline{Y_n} \leqslant F(x)\right]\right) \cup E_n\right) \to 1$ quand $n \to +\infty$, par la formule du crible, $\mathbf{P}_\theta\left(\left[\overline{Y_n} \leqslant F(x)\right]\right) \cap E_n\right) \to 1$ quand $n \to +\infty$.
D'où par encadrement,

$$\mathbf{P}_\theta\left(\left[T_n \leqslant x\right]\right) \to 1 \text{ quand } n \to +\infty$$

— Si $x < \theta, F(x) < F(\theta)$, d'où $\mathbf{P}_\theta\left(\left[\overline{Y_n} \leqslant F(x)\right]\right) \to 0$ quand $n \to +\infty$ et $\mathbf{P}_\theta\left(\left[\overline{Y_n} \leqslant F(x)\right] \cap E_n\right) \to 0$ quand $n \to +\infty$ puisqu'elle est majorée par la précédente.
Avec 13.a), on déduit que

$$\mathbf{P}_\theta\left(\left[T_n \leqslant x\right]\right) \to 0 \text{ quand } n \to +\infty$$

Bilan : $\boxed{\text{si } x \neq \theta, \lim_{n\to+\infty} P_\theta(T_n \leq x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < \theta \\ 1 \text{ si } x > \theta \end{cases}}$

(d) La fonction de répartition de la variable constante Z de valeur θ est $F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \theta \\ 1 & \text{si } x \geq \theta \end{cases}$.

Avec le résultat précédent, on peut dire qu'en tout point x de continuité de F_Z, on a $\lim_{n\to+\infty} P_\theta(T_n \leq x) = F_Z(x)$.

Ainsi $\boxed{(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge en loi vers } \theta}$

(e) Montrons maintenant que $T_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \theta$ quand $n \to +\infty$.
Soit $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} P_\theta(|T_n - \theta| \geq \epsilon) &= P_\theta(T_n \geq \theta + \epsilon) + P_\theta(T_n \leq \theta - \epsilon) \\ &= 1 - P_\theta(T_n < \theta + \epsilon) + P_\theta(T_n \leq \theta - \epsilon) \\ &\to_{n\to+\infty} 1 - 1 + 0 = 0 \end{aligned}$$

d'après le 11.(c).
Ainsi $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires sur $(\Omega, \mathbf{P}_\theta, \mathcal{A})$ (13.b)i.) qui converge en probabilité vers θ et dont la définition ne dépend pas de θ.

Bilan : $\boxed{T_n \text{ est une suite convergente d'estimateurs de } \theta}$

12. (a) i. Cela provient de la continuité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ sur $\mathbb{R}$, donc en particulier au point θ : par définition de la continuité,

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0; \quad \forall x \in [\theta - \alpha, \theta + \alpha], \quad |\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(\theta)}| \leq \epsilon$$

ii. Soit $\omega \in [|T_n - \theta| \leqslant \alpha] \cap E_n$. On a donc $F^{-1}\left(\overline{Y_n}(\omega)\right) \in [\theta - \alpha, \theta + \alpha]$ ie $\overline{Y_n}(\omega) \in [F(\theta - \alpha), F(\theta + \alpha)]$.
Mais, $U_n(\omega) = \frac{F^{-1}\left(\overline{Y_n}(\omega)\right) - F^{-1}(F(\theta))}{\overline{Y_n}(\omega) - F(\theta)}$.
Il suffit alors d'établir que pour tout $y \in [F(\theta - \alpha), F(\theta + \alpha)]$,

$$\left|\frac{F^{-1}(y) - F^{-1}(F(\theta))}{y - F(\theta)} - \frac{1}{f(\theta)}\right| \leqslant \varepsilon$$

On applique l'égalité des accroissements finis à la fonction F^{-1} dérivable sur $[F(\theta - \alpha), F(\theta + \alpha)]$: il existe $c \in]F(\theta - \alpha), F(\theta + \alpha)[$ tel que $\frac{F^{-1}(y) - F^{-1}(F(\theta))}{y - F(\theta)} = \left(F^{-1}\right)'(c) = \frac{1}{F'(F^{-1}(c))} = \frac{1}{f(F^{-1}(c))}$.

D'où $\left|\frac{F^{-1}(y) - F^{-1}(F(\theta))}{y - F(\theta)} - \frac{1}{f(\theta)}\right| = \left|\frac{1}{f(F^{-1}(c))} - \frac{1}{f(\theta)}\right|$ et puisque $F^{-1}(c) \in]\theta - \alpha, \theta + \alpha[$, on obtient que $\left|\frac{1}{f(F^{-1}(c))} - \frac{1}{f(\theta)}\right| \leqslant \varepsilon$.
On a bien prouvé que $[|T_n - \theta| \leqslant \alpha] \cap E_n \subset B_n(\varepsilon)$.

iii. Étant donné que T_n converge en probabilité vers $\theta, \mathbf{P}_\theta\left([|T_n - \theta| \leqslant \alpha]\right)$ tend vers 1 quand $n \to +\infty$.
Sachant de plus que $\mathbf{P}_\theta\left(E_n\right) \to 1$ quand $n \to +\infty$, on a comme précédemment que

$$\mathbf{P}_\theta\left([|T_n - \theta| \leqslant \alpha] \cap E_n\right) \to 1 \text{ quand } n \to +\infty$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, si l'on choisit α comme dans la question 12, cela montre que $\mathbf{P}_\theta\left(B_n(\varepsilon)\right) \to 1$ quand $n \to +\infty$.
Bilan : $\boxed{(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge en probabilité vers } \frac{1}{f(\theta)}.}$

(b) On a la relation suivante pour tout $n \in \mathbb{N}^*, T_n - \theta = U_n\left(\overline{Y_n} - F(\theta)\right)$.
C'est immédiat pour les ω tels que $\overline{Y_n}(\omega) \neq F(\theta)$.
Si $\overline{Y_n}(\omega) = F(\theta)$ alors $T_n(\omega) = F^{-1}(F(\theta)) = \theta$ car $\overline{Y_n}(\omega) \in]0, 1[$, d'où l'égalité est aussi vérifiée.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n}\left(T_n - \theta\right) = U_n \times \sqrt{n}\left(\overline{Y_n} - F(\theta)\right)$.
On applique Slutsky :
— $U_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \frac{1}{f(\theta)}$,
— $\sqrt{n}\left(\overline{Y_n} - F(\theta)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} V$ où V suit la loi $\mathcal{N}(0, F(\theta)(1 - F(\theta)))$,
D'où

$$U_n \times \sqrt{n}\left(\overline{Y_n} - F(\theta)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{f(\theta)}V \text{ qui suit la loi } \mathcal{N}\left(0, \frac{F(\theta)(1 - F(\theta))}{f(\theta)^2}\right)$$

Partie IV. Régression logistique

13. (a) La matrice M^tM est une matrice carrée d'ordre p. Soit X une matrice colonne d'ordre p telle que M^tMX. On a alors ${}^tXM^tMX = 0$ i.e. ${}^t\left({}^tMX\right){}^tMX = \left\|{}^tMX\right\|^2 = 0$ où la norme est la norme canonique sur $\mathbb{R}^k$. Alors ${}^tMX = 0$ mais les p colonnes de ${}^tM$ forment une famille libre puisque rg $\left({}^tM\right) = p$ donc X est la colonne nulle.
On peut en déduire que

$$M^tM \text{ est inversible.}$$

(b) Remarquons que ${}^t\left({}^tMU - H\right)^t MU - H = \left\|{}^tMU - H\right\|^2$.

D'après le théorème des pseudo-solutions, puisque le rang de ${}^tM$ est égal à son nombre de colonnes, on sait que U est unique.

De plus cette matrice colonne U est telle que ${}^tMU$ est égale à la projection orthogonale de H sur $Im({}^tM)$.

On admet conformément à l'énoncé que $U = \left(M^tM\right)^{-1} MH$.

(c) Si l'on connaît les lois des $Y_{i,n}$ alors on connait $\Lambda\left(\left\langle\alpha, x^{(i)}\right\rangle\right)$, donc puisque Λ est injective, on connaît pour les produits scalaires $\left\langle\alpha, x^{(i)}\right\rangle$ donc pour $i \in [\![1, k]\!]$.
Pour pouvoir déterminer α de manière unique il est nécessaire que, si pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, on a $\left\langle\alpha, x^{(i)}\right\rangle = 0$ alors α est le vecteur nul.

Donc l'orthogonal de Vect $\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}\right)$ doit être réduit au vecteur nul i.e.
Vect $\left(x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}\right) = \mathbb{R}^p$ ce qui signifie que

$$rg(M) = p$$

14. (a) On est bien en présence d'une suite de variables aléatoires ne dépendant pas des paramètres à estimer.

La fonction L est la réciproque de Λ qui possède les propriétés de la fonction F intervenant dans la partie III. D'où en appliquant les résultats de la partie III, $(T_{i,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $\left\langle \alpha, x^{(i)} \right\rangle$ d'où d'après le cours, $(c_i T_{i,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers $c_i \left\langle \alpha, x^{(i)} \right\rangle$.

De plus $\mathbf{P}_\theta \left(\left[\left| \sum_{k=1}^k c_i T_{i,n} - \sum_{k=1}^k c_i \left\langle \alpha, x^{(i)} \right\rangle \right| \geqslant \varepsilon \right] \right) = \mathbf{P}_\theta \left(\left[\left| \sum_{k=1}^k c_i T_{i,n} - c_i \left\langle \alpha, x^{(i)} \right\rangle \right| \geqslant \varepsilon \right] \right)$

Or $\left| \sum_{k=1}^k c_i T_{i,n} - c_i \left\langle \alpha, x^{(i)} \right\rangle \right| \leqslant \sum_{k=1}^k \left| c_i T_{i,n} - c_i \left\langle \alpha, x^{(i)} \right\rangle \right|$ d'où

$$\mathbf{P}_\theta \left(\left[\left| \sum_{k=1}^k c_i T_{i,n} - c_i \left\langle \alpha, x^{(i)} \right\rangle \right| \geqslant \varepsilon \right] \right) \leqslant \mathbf{P}_\theta \left(\left[\sum_{k=1}^k \left| c_i T_{i,n} - c_i \left\langle \alpha, x^{(i)} \right\rangle \right| \geqslant \varepsilon \right] \right)$$

De plus $\left[\sum_{k=1}^k \left| c_i T_{i,n} - c_i \left\langle \alpha, x^{(i)} \right\rangle \right| \geqslant \varepsilon \right] \subset \bigcup_{j=1}^k \left[\left| c_i T_{i,n} - c_i \left\langle \alpha, x^{(i)} \right\rangle \right| \geqslant \frac{\varepsilon}{k} \right]$
d'où

$$\mathbf{P}_\theta \left(\left[\sum_{k=1}^k \left| c_i T_{i,n} - c_i \left\langle \alpha, x^{(i)} \right\rangle \right| \geqslant \varepsilon \right] \right) \leqslant \sum_{j=1}^k \mathbf{P}_\theta \left(\left[\left| c_i T_{i,n} - c_i \left\langle \alpha, x^{(i)} \right\rangle \right| \geqslant \frac{\varepsilon}{k} \right] \right)$$

d'après l'inégalité de Boole.
Or cette somme tend vers 0 quand $n \to +\infty$ ce qui permet d'en conclure que :

$$\mathbf{P}_\theta \left(\left[\left| \sum_{k=1}^k c_i T_{i,n} - \sum_{k=1}^k c_i \left\langle \alpha, x^{(i)} \right\rangle \right| \geqslant \varepsilon \right] \right) \to 0$$

quand $n \to +\infty$ ce qui achève la démonstration.

(b) D'après la question précédente,
$A_{j,n}$ est une combinaison linéaire des $T_{i,n}$ pour $i \in [\![1, k]\!]$ donc est un estimateur et,
$(A_{j,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers la j-ième composante de $\left(M^t M\right)^{-1} M \begin{pmatrix} \left\langle \alpha, x^{(1)} \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \alpha, x^{(k)} \right\rangle \end{pmatrix}$.

Or $\begin{pmatrix} \left\langle \alpha, x^{(1)} \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \alpha, x^{(k)} \right\rangle \end{pmatrix} = {}^t M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$, d'où

$$\left(M^t M\right)^{-1} M \begin{pmatrix} \left\langle \alpha, x^{(1)} \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle \alpha, x^{(k)} \right\rangle \end{pmatrix} = \left(M^t M\right)^{-1} M^t M \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}$$

D'où
$(A_{j,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers α_j

Remarque : notations très lourdes à la fin, ça délire un peu...
Bon, de toutes façons presque personne n'arrive jusque là...

Remarque : énoncé raccourci car j'ai dû supprimer deux questions qui portaient sur les nombres complexes et la trigonométrie (le but était de calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, ce que nous avons fait dans le 1er DS de début d'année).