CB2 sujet Maths I - ESSEC 2011

Je reprends quelques questions dont le corrigé dans le fichier d'annales est erronné.

1) Montrons que $C(U)$ est un s.e.v. de $L(E)$.

- Par hypothèse, $C(U) \subset L(E)$.
- L'application nulle $0_{\mathcal{L}(E)}$ appartient à $C(U)$ puisque :

$$\forall u \in U, \quad 0_{\mathcal{L}(E)} \circ u = 0_{\mathcal{L}(E)} = u \circ 0_{\mathcal{L}(E)}$$

- Soit $(v, w) \in C(U)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda.v + w \in C(U)$. Pour tout $u \in U$,

$$\begin{aligned} (\lambda.v + w) \circ u &= \lambda v \circ u + w \circ u \\ &= \lambda u \circ v + u \circ w \quad \text{puisque } v \text{ et } w \text{ commutent avec } u \\ &= u \circ (\lambda.v + w) \end{aligned}$$

donc $\lambda.v + w \in C(U)$.

- Bilan : $\boxed{C(U) \text{ est un s.e.v. de } L(E)}$

De plus, de façon évidente $Id_E \in C(U)$ donc $C(U) \neq \{0_{\mathcal{L}(E)}\}$ et $\boxed{\dim(C(U)) \geq 1}$

5) a. Montrons que H est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $App(]-1,1[,\mathbb{R})$ des applications de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$.

- Par définition, $H \subset App(]-1,1[,\mathbb{R})$.
- La fonction nulle $0_{App(]-1,1[,\mathbb{R})}$ est associée à la suite nulle : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$ qui appartient à A de façon évidente. Donc $0_{App(]-1,1[,\mathbb{R})} \in H$.
- Soit $(f, g) \in H^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de A telles que pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n.x^n$. Montrons que $\lambda.f + g \in H$. On remarque que, sous réserve de convergence, $\forall x \in]-1,1[$,

$$\lambda.f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda.a_n + b_n).x^n$$

Il reste à montrer que la suite $(\lambda.a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à A, c'est-à-dire que la série ci-dessus est absolument convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par inégalité triangulaire :

$$|(\lambda.a_n + b_n).x^n| \leq |\lambda|.|a_n.x^n| + |b_n.x^n|$$

La série de t.g. $|\lambda|.|a_n.x^n| + |b_n.x^n|$ converge en tant que combinaison linéaire de séries convergentes. Par critère de majoration, la série de t.g. $|(\lambda.a_n + b_n).x^n|$ est convergente, ce qui montre que $(\lambda.a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à A et donc que $\lambda.f + g \in H$.

- Bilan : $\boxed{H \text{ est un s.e.v. de } App(]-1,1[,\mathbb{R})}$

6) a. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique : il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = q^n.a_0$. Cette suite appartient à B si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} & 2a_{n+3} + 3a_{n+2} - a_n = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2.q^{n+3}.a_0 + 3.q^{n+2}.a_0 - q^n.a_0 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & a_0.q^n.(2q^3 + 3q^2 - 1) = 0 \end{aligned}$$

On a donc : - $a_0 = 0$, auquel cas la suite est nulle quelle que soit la raison q;
- ou alors $q^n = 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$), donc en particulier $q^0 = 0$, ce qui est impossible;
- ou alors $2q^3 + 3q^2 - 1 = 0$. Cette équation a pour solution évidente $q = -1$, et alors $(q+1)(2q^2 + q - 1) = 0$, d'où $(q+1)(q+1)(2q-1) = 0$, donc $q = -1$ ou $q = \frac{1}{2}$.

Bilan : les seules suites géométriques appartenant à B sont les suites de raison $q = -1$ ou de raison $q = \frac{1}{2}$. (notons que la suite nulle est une de ces suites)

15. Soit $x \in E$. Comme $E = \oplus_{i=1}^{p} E_i$, on peut écrire $x = x_1 + \cdots + x_p$ où pour tout $i \in [[1,p]]$, $x_i \in E_i$. D'une part,

$$v \circ u(x) = v(\sum_{i=1}^{p} u(x_i)) = v(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i.x_i) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i.v(x_i)$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} u \circ v(x) &= u(\sum_{i=1}^{p} v(x_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{p} u(v(x_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{p} \lambda_i.v(x_i) \text{ car } E_i \text{ est stable par } v \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $x \in E$, $v \circ u(x) = u \circ v(x)$, ce qui montre que $v \circ u = u \circ v$, et donc que $v \in C(u)$.