Corrigé DM n° 14 - pour le 17/02/25

PROBLEME

Les variables aléatoires considérées dans ce problème seront toutes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On notera Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

Soit σ un réel strictement positif, on note f_σ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{t}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

I. Etude de la loi de Rayleigh

1. (a) La fonction f_σ est positive, continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. De plus, pour tout $A > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^A f_\sigma(t)dt &= \int_0^A \frac{t}{\sigma^2}\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= [-\exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)]_0^A \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{A^2}{2\sigma^2}\right) \to_{A\to+\infty} 1 \end{aligned}$$

donc $\int_0^{+\infty} f_\sigma(t)dt = 1$.
<u>Bilan :</u> $\boxed{f_\sigma \text{ est une densité de probabilité}}$

(b) La fonction f_σ est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $t > 0$,

$$f'_\sigma(t) = (1 - \frac{t^2}{\sigma^2}).\frac{1}{\sigma^2}.e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$$

donc $f'_\sigma(t) = 0$ ssi $t = \sigma$. D'où le tableau de variations de f_σ sur $]0; +\infty[$:

t	0		σ		$+\infty$
$P'_n(t)$		$+$	0	$-$	
$P_n(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sigma}.e^{-1/2}$	$\searrow$	0

(c) f_σ admet un maximum en σ. Par conséquent, la courbe la plus haute correspond à $f_{1/2}$, la courbe intermédiaire à f_1 et la plus basse à f_2.

Soit X une variable aléatoire de densité f_σ, on dit que X suit la loi de Rayleigh de paramètre σ, notée $\mathcal{R}(\sigma)$

2. (a) $X(\Omega) = [0; +\infty[$. Donc $\forall x < 0$, $F_X(x) = 0$. Si $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_0^x f_\sigma(t)dt \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \text{ voir ci-dessus !} \end{aligned}$$

(b) La fonction F_X est continue sur $[0; +\infty[$ et strictement croissante sur cet intervalle puisque $\forall x > 0$, $F'_X(x) = f_\sigma(x) > 0$. De plus, $F_X(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1$. D'après le théorème de la bijection F_X est bijective de $[0, +\infty[$ vers $[0, 1[$.
Soit $y \in [0, 1[$.

$$\begin{aligned} y = F_X(x) &\Leftrightarrow y = 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \\ &\Leftrightarrow x^2 = -2\sigma^2.\ln(1-y) \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{-2\sigma^2.\ln(1-y)} \end{aligned}$$

car $x \geq 0$. Notons qu'ici $\ln(1-y) \leq 0$ car $y \in [0, 1[$.

<u>Bilan :</u> F_X est bijective de $[0; +\infty[$ dans $[0, 1[$. Sa bijection réciproque est donnée par :

$$F_X^{-1} : [0, 1[\to [0; +\infty[, \quad x \mapsto \sqrt{-2\sigma^2.\ln(1-x)}$$

(c) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1[)$. Posons $V = F_X^{-1}(U)$. Alors $V(\Omega) = \mathbb{R}_+ = X(\Omega)$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\begin{aligned} P(V \leq x) &= P(F_X^{-1}(U) \leq x) = P(U \leq F_X(x)) \text{ car } F_X \text{ croissante} \\ &= F_X(x) \end{aligned}$$

Donc V et X ont la même fonction de répartition, ces variables aléatoires suivent donc la même loi.
Voici un programme simulant X :

```
def Rayleigh(s):
    U=rd.random()
    X=np.sqrt(-2.s**2*np.log(1-U))
return(X)
```

3. **Moments de la loi de Rayleigh**

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par le théorème de transfert, $E(X^n)$ existe ssi l'intégrale suivante est absolument convergente :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{\sigma^2}.\exp(-\frac{t^2}{2\sigma^2}dt$$

Cette intégrale est impropre en $+\infty$ uniquement.
Comme $\lim_{t\to+\infty} \frac{t^{n+3}}{\sigma^2}.\exp(-\frac{t^2}{2\sigma^2} = 0$ (C.C.), on a $\frac{t^{n+1}}{\sigma^2}.\exp(-\frac{t^2}{2\sigma^2} = o_{t\to+\infty}(\frac{1}{t^2}$.
Puisque $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), par négligeabilité

$\int_1^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{\sigma^2}.\exp(-\frac{t^2}{2\sigma^2}dt$ converge, donc finalement $\boxed{E(X^n) \text{ existe bien}}$.

Posons $u = \frac{t^2}{2\sigma^2}$. La fonction $t \mapsto \frac{t^2}{2\sigma^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante, bijective de $[0;+\infty[$ sur $[0;+\infty[$. De plus $du = \frac{t}{\sigma^2}dt$. Finalement, par changement de variables,

$$\begin{aligned} E(X^n) &= \int_0^{+\infty} \sqrt{2u}.\sigma)^n.e^{-u}du \\ &= 2^{n/2}.\sigma^n.\int_0^{+\infty} u^{n/2}.e^{-u}du \\ &= 2^{\frac{n}{2}}\sigma^n\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \end{aligned}$$

(b) On en déduit que

$$E(X) = 2^{\frac{1}{2}}\sigma\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{2}.\sigma.\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sigma.\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$E(X^2) = 2\sigma^2\Gamma(2) = 2\sigma^2$$

d'où

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2\sigma^2 - \frac{\pi}{2}.\sigma^2 = (2-\frac{\pi}{2}).\sigma^2$$

4. Notons $Y = X^2$. On a $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$, donc pour tout $x<0$, $F_Y(x) = 0$. Si $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(X^2 \leq x) = P(X \leq \sqrt{x}) \text{car } X \text{ est à valeurs positives} \\ &= F_X(\sqrt{x}) \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{x}{2\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\frac{1}{2\sigma^2})$. Par conséquent, $E(Y) = 2\sigma^2$, et on retrouve bien que $E(X^2) = 2\sigma^2$.

Pour toute la suite de ce problème : on suppose que $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi de Rayleigh de paramètre σ

II. Minimum et conditionnement

On considère une variable aléatoire N indépendante de la suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ et suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Z_n = Min(X_1,\ldots,X_n)$ et $Z_N = Min(X_1,\ldots,X_N)$ définie par

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z_N(\omega) = Min\big(X_1(\omega),\ldots,X_{N(\omega)}(\omega)\big)$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

(a) $Z_n(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Si $x<0$, $F_{Z_n}(x) = 0$. Si $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(x) &= P(min(X_1,\cdots,X_n) \leq x) \\ &= 1 - P(min(X_1,\cdots,X_n) > x) \\ &= 1 - P([X_1 > x] \cap \cdots \cap [X_n > x]) \\ &= 1 - (P(X>x))^n \text{ car les variables sont indépendantes et toutes de même loi} \\ &= 1 - (1-F_X(x))^n \\ &= 1 - (\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right))^n \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{nx^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= 1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})^2}\right) \end{aligned}$$

<u>Bilan :</u> $\boxed{Z_n \text{ suit une loi de Rayleigh de paramètre } \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

(b) On en déduit que

$$E(Z_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.\sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{ et } V(X) = (2-\frac{\pi}{2}).\frac{\sigma^2}{n}$$

2. (a)
```
N=rd.geometric(p)
U=rd.random(N)
X=np.sqrt(-2.s**2*np.log(1-U))
Z_N=np.min(X)
```

(b) $Z_N(\Omega) = \mathbb{R}_+$. Donc si $x<0$, $F_{Z_N}(x) = 0$. Si $x \geq 0$, d'après la FPT dans le SCE $([N=n])_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$$\begin{aligned} F_{Z_N}(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n).P_{N=n}(Z_N \leq x) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n).F_{Z_n}(x) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p.q^{n-1}.(1-\exp\left(-\frac{x^2}{2(\frac{\sigma}{\sqrt{n}})^2}\right)) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} p.q^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} p.q^{n-1}.\exp(-\frac{n.x^2}{2\sigma^2})) \\ &= 1 - p.\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}).\sum_{n=1}^{+\infty}(q.\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2}))^{n-1} \\ &= 1 - p.\frac{\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})}{1-q.\exp(-\frac{x^2}{2\sigma^2})} \end{aligned}$$

(c) Cette fonction de répartition est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, et continue sur $\mathbb{R}$ notamment en 0 car $1-p.\frac{1}{1-q} = 1-1 = 0$. Donc Z_N est une variable aléatoire à densité.

En dérivant F_{Z_N} sur $]0;+\infty[$, puis en dérivant on obtient bien le résultat souhaité:
Bilan : une densité de Z_N est g où

$$\forall x<0,\ g(x)=0 \text{ et } \forall x\geq 0,\ g(x)=\frac{p\,x\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2\left(1-(1-p)\,e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)^2}$$

(d) D'après la formule de l'espérance totale, $E(Z_N)$ existe ssi la série suivante converge

$$\sum_{n=1}^{+\infty} P(N=n).E(Z_N|N=n)$$

Sous réserve de convergence,

$$\begin{aligned} E(Z_N) &= \sum_{n=1}^{+\infty} pq^{n-1}.\frac{\sigma}{\sqrt{n}}.\sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sigma.\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{p}{q}.\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^n}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Pour tout $n\geq 1$, $0\leq \frac{q^n}{\sqrt{n}}\leq q^n$, et la série $\sum_{n\geq 1} q^n$ converge bien puisqu'il s'agit d'une série géométrique.

Bilan : $\boxed{E(Z_N) \text{ existe et}}$

$$E(Z_N)=\sigma.\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{p}{q}.\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{q^n}{\sqrt{n}}$$

(e)
```
n=1000
L=np.arange(1,n+1,1)
A=np.sqrt(L)
B=np.exp(L*np.log(q))
S=np.sum(A/B)
S=sigma*np.sqrt(np.pi/2)*p/q*S
print(S)
```

III. Estimation du paramètre de la loi de Rayleigh

1. Classique ! La fonction Φ est strictement croissante et continue, donc bijective de $]0;+\infty[$ sur $]0,1[$. Soit $\alpha\in]0,1[$. Comme $1-\frac{\alpha}{2}\in]0,1[$, il existe bien un unique réel $\varepsilon>0$ tel que $\Phi(\varepsilon)=1-\frac{\alpha}{2}$, c'est-à-dire tel que $2\Phi(\varepsilon)-1=1-\alpha$

2. **Première méhode**

$$\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}^*, \text{ on pose } \ M_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$$

3. (a) $E(M_n)=E(X)=\sigma.\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Comme les variables X_1, ..., X_n sont indépendantes,

$$V(M_n)=\frac{1}{n^2}.n.V(X)=\frac{1}{n}.(2-\frac{\pi}{2}).\sigma^2$$

Posons $T_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.M_n$. Alors $E(T_n)=\sigma$, donc T_n est un estimateur sans biais de σ.
De plus,

$$V(T_n)=\frac{2}{\pi}.V(M_n)\to_{n\to+\infty}0$$

D'après la condition sufffisante du cours, T_n est un estimateur convergent de σ.

Bilan : $\boxed{T_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.M_n \text{ est un estimateur sans biais et convergent de } \sigma}$

(b)

$$T_n^*=\frac{T_n-E(T_n)}{\sqrt{V(T_n)}}=\sqrt{n}.\frac{T_n-\sigma}{\sqrt{\frac{2}{\pi}}.\sqrt{2-\frac{\pi}{2}}.\sigma}$$

(c) Comme les variables X_1, ..., X_n sont indépendantes, de même espérance et de même variance, il en est de même pour les variables $\sqrt{\frac{2}{\pi}}.X_1$, ..., $\sqrt{\frac{2}{\pi}}.X_n$. D'après le Théorème Central Limite,

$$T_n^*\xrightarrow{\mathscr{L}}T\ ,\ \text{ où } T\hookrightarrow\mathcal{N}(0,1)$$

(d) D'après le TCL,

$$\lim_{n\to+\infty}P(-\epsilon\leq T_n^*\leq\epsilon)=P(-\epsilon\leq T\leq\epsilon)=2\Phi(\epsilon)-1=1-\alpha$$

Or

$$\begin{aligned} [-\epsilon\leq T_n^*\leq\epsilon] &= [-\epsilon\leq\sqrt{n}.\frac{T_n-\sigma}{\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}.\sigma}\leq\epsilon] \\ &= [-\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}\leq\frac{T_n}{\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}.\sigma}-\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}}\leq\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}] \\ &= [-\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}}\leq\frac{T_n}{\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}.\sigma}\leq\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}}] \\ &= [\frac{1}{\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}}}\leq\frac{\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}.\sigma}{T_n}\leq\frac{1}{-\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}}}] \\ &= [\frac{T_n}{1+\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}.\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}}\leq\sigma\leq\frac{T_n}{1-\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}.\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}}] \end{aligned}$$

Bilan : $[\frac{T_n}{1+\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}.\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}};\frac{T_n}{1-\frac{\epsilon}{\sqrt{n}}.\sqrt{\frac{4}{\pi}-1}}]$ est un intervalle de confiance asymptotique pour σ au risque α.

Méthode du maximum de vraisemblance

4. Soient $x_1, \dots, x_n$, n réels strictement positifs, on considère la fonction de vraisemblance

   c'est-à-dire la fonction L définie sur $]0, \infty[$ par $\forall \sigma > 0,\ L(\sigma) = \prod_{i=1}^{n} f_\sigma(x_i)$

5. (a)

$$\begin{aligned} G(\sigma) &= \sum_{i=1}^{n} \ln(f_\sigma(x_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \ln(\frac{x_i}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}\right)) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \ln(x_i) - 2n.\ln(\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2}.\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{aligned}$$

   (b) La fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $\sigma > 0$,

$$G'(\sigma) = -\frac{2n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}.\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

   Cette dérivée s'annule en $\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. De plus, si $x < \sigma_1$, $G'(\sigma) > 0$ et si $x > \sigma_1$, $G'(\sigma) < 0$. La fonction G admet donc un maximum en σ_1.

   (c) Comme $L = \exp \circ G$, par croissance de la fonction exponentielle, L admet également un maximum en $\sigma = \sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

6. On pose alors $W_n = \sqrt{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}$ l'estimateur du maximum de vraissemblance de σ

   (a) Pour tout $i \in [[1, n]]$, $X_i^2 \hookrightarrow \mathcal{E}(\frac{1}{2\sigma^2})$. Donc $\frac{1}{2\sigma^2}.X_i^2 \hookrightarrow E(1) = \gamma(1)$. Par stabilité pour la somme de la loi γ, les variables étant toutes indépendantes par coalition, on a $\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ qui suit la loi $\gamma(n)$.

   (b) On a alors $W_n^2 = \frac{\sigma^2}{n}.(\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} X_i^2)$, d'où

$$E(W_n^2) = \frac{\sigma^2}{n}.n = \sigma^2$$

   Donc W_n^2 est un estimateur sans biais de σ^2.

$$V(W_n^2) = \frac{\sigma^4}{n^2}.n = \frac{\sigma^4}{n}$$

   Comme $\lim_{n\to+\infty} V(W_n^2) = 0$, W_n^2 est un estimateur convergent de σ^2:

$$W_n^2 \xrightarrow{\mathscr{P}} \sigma^2$$

   (c) Finalement, comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$,

$$W_n \xrightarrow{\mathscr{P}} \sigma$$

   $\boxed{W_n \text{ est un estimateur convergent de } \sigma}$