Corrigé du DS n° 6

Exercice 1

1. (a) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{H}(n)$: "u_n existe et $u_n > 0$".
   - Initialisation : si $n = 0$, évident car $u_0 = 1$.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{H}(n)$ vraie. Comme $u_n > 0$, $u_n(u_n+1) > 0$ donc u_{n+1} existe. De plus, $u_{n+1} = 2u_n + 2\sqrt{u_n(u_n+1)} > 0$ donc $\mathcal{H}(n+1)$ vraie.
   - Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \text{ existe et } u_n > 0}$

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_{n+1} - u_n = u_n + 2\sqrt{u_n(u_n+1)} > 0$$
   donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (strictement) croissante. De plus, comme $u_0 = 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 1$ donc
   $$u_{n+1} - u_n \geq 1 \Leftrightarrow u_{n+1} \geq 1 + u_n$$
   et on en déduit par une récurrence facile que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n+1$. Par entrainement, on a bien $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$

   Autre méthode : supposons que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$. Alors $l \geq 0$ (car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$) et en passant à la limite dans la relation définissant u_n : $l = 2l + 2\sqrt{l(l+1)}$ (la fonction racine carrée étant continue sur $\mathbb{R}_+$). D'où $l = -2\sqrt{l(l+1)} \leq 0$. Seule possibilité : $l = 0$, mais ceci est faux car $u_0 = 1$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc divergente. Etant croissante, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. Comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, APCR on a bien $u_n \geq 1000$. Il suffit alors de prendre le plus petit entier vérifiant cette propriété.

```
u=1
k=0
while u<1000 :
  u=2*u+2*np.sqrt(u*(u+1))
  k=k+1
end
print("n0=",k)
```

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_n > 0$. Comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t\sqrt{t+1}}$ est définie et continue sur $[u_n, +\infty[$, l'intégrale I_n est impropre uniquement en $+\infty$. Mais $\frac{1}{t\sqrt{t+1}} \sim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}$. Comme l'intégrale $\int_{u_n}^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt$ est convergente (Riemann, $\alpha = 3/2 > 1$), par négligeabilité l'intégrale I_n est convergente.

   Bilan : $\boxed{I_n \text{ existe pour tout } n \in \mathbb{N}}$

4. (a) Pour tout $x > 0$, on a $x + 1 > 1$ donc :
   - $x+1 > 0$, par composition $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.
   - $x \mapsto \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Cette fonction est à valeurs dans $]0; +\infty[$.
   - Enfin, par composition avec la fonction ln, dérivable sur $]0; +\infty[$, la fonction g est dérivable sur $]0; +\infty[$.

   (b) Pour tout $x > 0$,
   $$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}(\sqrt{x+1}+1) - (\sqrt{x+1}-1)\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{(\sqrt{x+1}+1)^2} \times \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1} \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}+1} \times \frac{1}{\sqrt{x+1}-1} \\ &= \frac{1}{x\sqrt{x+1}} \end{aligned}$$
   Résultat peu surprenant étant donnée la question suivante !!

   (c) On en déduit que pour tout $A \geq 1$,
   $$I_0^A = \int_1^A \frac{1}{t\sqrt{t+1}} = [g(t)]_1^A = g(A) - \ln(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1})$$
   D'une part,
   $$\frac{\sqrt{A+1}-1}{\sqrt{A+1}+1} \sim_{A\to+\infty} \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{A}} = 1$$
   donc $\lim_{A\to+\infty} g(A) = \ln(1) = 0$ (par continuité du ln en 1).
   D'autre part,
   $$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = \frac{2-1}{(\sqrt{2}+1)^2} = \frac{1}{(1+\sqrt{2})^2}$$
   d'où $-\ln(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}) = 2\ln(1+\sqrt{2})$. Ainsi $\lim_{A\to+\infty} I_0^A = 2\ln(1+\sqrt{2})$.

   Bilan : $\boxed{I_0 = 2\ln(\sqrt{2}+1)}$

5. (a)
   $$\forall x > 0,\quad (\sqrt{x} + \sqrt{x+1})^2 = 2x + 1 + 2\sqrt{x(x+1)} = 1 + f(x)$$

   (b) En dérivant les deux membres de la relations précédente : $\forall x > 0$,
   $$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\sqrt{x} + \sqrt{x+1}).(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}) \\ &= (\sqrt{x} + \sqrt{x+1}).\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+1)}} \\ &= (\sqrt{x} + \sqrt{x+1})^2.\frac{1}{\sqrt{x(x+1)}} \end{aligned}$$
   D'où
   $$\frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{f(x)+1}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{f(x).\sqrt{x(x+1)}}$$
   Or $f(x) = 2\sqrt{x}(\sqrt{x} + \sqrt{x+1})$ donc enfin
   $$\frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{f(x)+1}} = \frac{1}{2x\sqrt{x+1}}$$

6. (a) On part de l'intégrale $I_{n+1} = \int_{u_{n+1}}^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t+1}}\, dt$.
   - Posons $t = f(x)$.
   - La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, strictement croissante sur $]0, +\infty[$, bijective de $]0, +\infty[$ dans $]0; +\infty[$.

- Bornes $\begin{cases} t=+\infty \\ t=u_{n+1}=f(u_n) \end{cases} \quad \leftarrow \quad \begin{cases} x=+\infty \\ x=u_n \end{cases}$
- $dt = f'(x)dx$
-
$$\frac{1}{t\sqrt{t+1}}dt = \frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{f(x)+1}}dx = \frac{1}{2}.\frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx$$

Par CDV, on a donc, les intégrales étant convergentes,

$$I_{n+1} = \frac{1}{2}.\int_{u_n}^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x+1}}dx = \frac{1}{2}.I_n$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = 2I_n$

Bilan : $\boxed{\text{la suite } (I_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est géométrique de raison } \frac{1}{2}}$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = (\frac{1}{2})^n.I_0 = (\frac{1}{2})^n.2\ln(\sqrt{2}+1)$.

Bilan : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = (\frac{1}{2})^{n-1}.\ln(\sqrt{2}+1)}$

7. (a) Soit $x > 0$ et $A > x$.

$$\int_x^A \frac{1}{t\sqrt{t+1}}dt = [g(t)]_x^A = g(A) - g(x) \to_{A\to+\infty} -g(x)$$

D'après les calculs faits précédemment. Donc $\int_x^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t+1}}dt = -g(x)$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \ln(1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}) - \ln(1-\frac{1}{\sqrt{x+1}}) &= \ln(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}} \times \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}-1}) \\ &= \ln(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}) \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

Bilan :

$$\forall x > 0,\ \int_x^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t+1}}\ dt = \ln(1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}) - \ln(1-\frac{1}{\sqrt{x+1}}).$$

(b) Le DL de $\ln(1+u)$ en 0 à l'ordre 1 est $\ln(1+u) = u + o(u)$. On a donc ici

$$\ln(1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}) - \ln(1-\frac{1}{\sqrt{x+1}}) = \frac{2}{\sqrt{x+1}} + o_{x\to+\infty}(\frac{1}{\sqrt{x+1}})$$

donc

$$\ln(1+\frac{1}{\sqrt{x+1}}) - \ln(1-\frac{1}{\sqrt{x+1}}) \sim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x+1}} \sim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}}$$

(c) Pour finir, comme $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, on a $I_n \sim_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{u_n}}$.
Mais par ailleurs $I_n = (\frac{1}{2})^{n-1}.\ln(\sqrt{2}+1)$, d'où

$$\frac{2}{\sqrt{u_n}} \sim_{n\to+\infty} (\frac{1}{2})^{n-1}.\ln(\sqrt{2}+1) \Leftrightarrow \sqrt{u_n} \sim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{\ln(\sqrt{2}+1)} \Leftrightarrow u_n \sim_{n\to+\infty} \frac{4^n}{(\ln(\sqrt{2}+1))^2}$$

Bilan : $\boxed{u_n \sim_{n\to+\infty} \frac{4^n}{(\ln(\sqrt{2}+1))^2}}$

Exercice 2 : matrice de Gram

1. Dans cette question, on suppose que $n = p = 3$ et on considère les trois vecteurs:

$$u_1 = (1,-1,0), u_2 = (1,0,-1), u_3 = (1,1,1)$$

(a) On calcule :

$$\langle u_1, u_1\rangle = 2, \langle u_1, u_2\rangle = 1, \langle u_1, u_3\rangle = 0, ...$$

et on obtient aisément la matrice de Gram associée à (u_1, u_2, u_3) :

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est symétrique donc diagonalisable.

(b)

$$G^2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = 4G - 3I_3$$

(c) On en déduit que le polynôme $P = X^2 - 4X + 3$ est annulateur de G. Comme

$$Sp(G) \subset \{\text{racines de P}\}$$

on trouve que $Sp(G) \subset \{1, 3\}$.
De plus, $rg(G-I) = rg(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}) = 2$ et $rg(G-3I) = rg(\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = 1$ Par le théorème du rang, $\dim(Ker(G-I)) = 1$ et $\dim(Ker(G-3I) = 2$ et en particulier 1 et 3 sont bien valeurs propres de G.

Bilan : $\boxed{Sp(G) = \{1,3\} \text{ et les dimensions des sous-espaces propres associés sont 1 et 2}}$

Dans toute la suite de l'exercice, on revient au cas général où n est un entier supérieur ou égal à 2.

2. Soit p un entier appartenant à $[\![1,n]\!]$ et $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On note G la matrice de Gram de $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.

(a) Pour tout $(i,j) \in [[1,p]]^2$,

$$(G)_{i,j} = \langle u_i, u_j\rangle = \langle u_j, u_i\rangle = (G)_{j,i} \quad \text{(par symétrie du produit scalaire)}$$

donc la matrice G est symétrique. D'après le cours, elle est diagonalisable.

(b) Pour tout $(x_1, ..., x_p) \in \mathbb{R}^p$,

$$\begin{aligned} q_G(x_1,...,x_p) &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (G)_{i,j} x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \langle u_i, u_j\rangle x_i x_j \\ &= \sum_{i=1}^p x_i \left\langle u_i, \sum_{j=1}^p x_j u_j \right\rangle \text{ par bilinéarité du produit scalaire} \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^p x_i u_i, \sum_{j=1}^p x_j u_j \right\rangle \\ &= \left\| \sum_{i=1}^p x_i u_i \right\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

D'après le cours, on peut dire que $Sp(G) \subset \mathbb{R}_+$.

3. Soit encore p un entier appartenant à $[\![1, n]\!]$ et $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On pose F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ et on note G la matrice de Gram de $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$.

   On considère des réels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ et on pose $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.

   (a) On suppose que $\sum_{j=1}^p \alpha_j u_j = 0$.

$$\begin{aligned} GX &= \begin{pmatrix} \langle u_1 \mid u_1\rangle & \langle u_1 \mid u_2\rangle & \ldots & \langle u_1 \mid u_p\rangle \\ \langle u_2 \mid u_1\rangle & \langle u_2 \mid u_2\rangle & \ldots & \langle u_2 \mid u_p\rangle \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle u_p \mid u_1\rangle & \langle u_p \mid u_2\rangle & \ldots & \langle u_p \mid u_p\rangle \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^p \langle u_1, u_j\rangle .\alpha_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^p \langle u_p, u_j\rangle .\alpha_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left\langle u_1, \sum_{j=1}^p \alpha_j.u_j \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle u_p, \sum_{j=1}^p \alpha_j.u_j \right\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Donc $GX = 0$.

   (b) En reprenant les calculs précédents, on voit que $GX = 0$ si et seulement si

$$\forall i \in [[1,p]], \ \left\langle u_i, \sum_{j=1}^p \alpha_j u_j \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \forall i \in [[1,p]], \ \sum_{j=1}^p \alpha_j u_j \perp u_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^p \alpha_j u_j \in F^\perp$$

   Mais comme $\sum_{j=1}^p \alpha_j u_j \in F$, ce vecteur appartient à $F \cap F^\perp = \{0\}$.
   Donc $\sum_{j=1}^p \alpha_j u_j = 0$.

   (c) On raisonne par double implication.

   - Supposons que G est inversible. Montrons que la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est libre.

     Soit $(\alpha_1, ..., \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$ tels que $\sum_{j=1}^p \alpha_j u_j = 0$. Notons $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$. Alors $GX = 0$, mais comme G est inversible, cela implique que $X = 0$, donc $\alpha_1 = ... = \alpha_p = 0$ et la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est libre.
   - Supposons que la famille $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est libre.

     Alors pour tout $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$,

$$GX = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^p \alpha_j u_j = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0 \text{ (par liberté de la famille)} \Leftrightarrow X = 0$$

     Donc $Ker(G) = \{0\}$ et par le th. du rang matriciel, $rg(G) = p$: la matrice G est inversible.

   Bilan : $\boxed{\text{la famille } (u_1, u_2, \ldots, u_p) \text{ est libre si et seulement si la matrice } G \text{ est inversible}}$

4. On considère dans cette question une famille $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad \|v_i\| = 1 \text{ et } \quad \forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad i \neq j, \quad \|v_i - v_j\| = 1$$

   (a) Pour tous a et b dans $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \|a-b\|^2 &= \langle a-b, a-b\rangle \\ &= \langle a, a\rangle - \langle a, b\rangle - \langle b, a\rangle + \langle b, b\rangle \text{ par bilinéarité du produit scalaire} \\ &= \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b\rangle \end{aligned}$$

   (b) On en déduit que $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad i \neq j$

$$\langle v_i, v_j\rangle = \frac{1}{2}(\|v_i\|^2 + \|v_j\|^2 - \|v_i - v_j\|^2) = \frac{1}{2}$$

   D'où la matrice de Gram de $(v_1, \cdots, v_n)$:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

   (c) On pose $A = 2G$ et on note J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1 et enfin I_n la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

      i.
$$A = 2G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} = I_n + J$$

      D'où $A^2 = I_n + 2J + J^2 = I_n + 2J + nJ = I_n + (n+2)J$. Comme $J = A - I_n$, on a enfin
$$A^2 = I_n + (n+2).(A - I_n) = (n+2)A - (n+1)I_n$$

      ii. On en déduit que

$$(n+2)A - A^2 = (n+1)I_n \Leftrightarrow A.(\frac{n+2}{n+1}I_n - \frac{1}{n+1}A) = I_n$$

      Par conséquent A est inversible (et d'inverse $A^{-1} = \frac{n+2}{n+1}I_n - \frac{1}{n+1}A$).

      iii. Comme A est inversible, il en est de même de la matrice de Gram G et d'après les questions précédentes, la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est libre. Comme elle est de cardinal $n = \dim(\mathbb{R}^n)$, il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^n$.

5. Soit $\mathscr{B}_1 = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ une base quelconque de $\mathbb{R}^n$ et soit G la matrice de Gram de $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$.
   Soit $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$.
   On pose $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} \langle x \mid w_1\rangle \\ \langle x \mid w_2\rangle \\ \vdots \\ \langle x \mid w_n\rangle \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

(a) Comme la famille $\mathscr{B}_1$ est une base de $\mathbb{R}^n$, c'est une famille libre de $\mathbb{R}^n$, donc sa matrice de Gram G est inversible.
De plus, d'après les calculs en 3.a),

$$GX = \begin{pmatrix} \left\langle w_1, \sum_{j=1}^p \alpha_j.w_j \right\rangle \\ \vdots \\ \left\langle w_p, \sum_{j=1}^p \alpha_j.w_j \right\rangle \end{pmatrix} = Z$$

et ainsi $X = G^{-1}Z$.

(b) Soit encore $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j$. Soit $i \in [[1,n]]$. Alors x vérifie la propriété :

$$(*)\forall j \in [\![1,n]\!] \quad \langle x \mid w_j \rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

si et seulement si (avec les notations précédentes), et en notant $E_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ le ième vecteur de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$Z = E_i \Leftrightarrow GX = E_i \Leftrightarrow X = G^{-1}E_i \Leftrightarrow Mat_{\mathcal{B}_1}(x) = G^{-1}E_i$$

Comme un vecteur est déterminé de façon unique par sa matrice dans une base, il existe bien un unique vecteur x qui vérifie la condition $(*)$. On note ce vecteur w_i^*.
Ceci étant vrai pour tout $i \in [[1,n]]$, il existe donc bien une unique famille $\mathscr{B}_1^* = (w_1^*, w_2^*, \ldots, w_n^*)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad \langle w_i^* \mid w_j \rangle = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

(c) Montrons que la famille $\mathscr{B}_1^*$ est libre. Soit $(\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\sum_{i=1}^n \beta_i w_i^* = 0$$

Alors pour tout $j \in [[1,n]]$,

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{i=1}^n \beta_i w_i^* ; w_j \right\rangle = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \sum_{i=1}^n \beta_i \langle w_i^*, w_j \rangle = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \beta_j = 0 \text{ par hypothèse sur } w_i^* \end{aligned}$$

Donc la famille $\mathscr{B}_1^*$ est libre. De plus $Card(\mathscr{B}_1^*) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$ donc $\mathscr{B}_1^*$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

(d) Soit $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum_{j=1}^n \alpha_j w_j$. Alors avec le calcul ci-dessus, on voit que pour tout $i \in [[1,n]]$, $\langle x, w_i^* \rangle = \alpha_i$. Par conséquent la matrice de x dans la base $\mathcal{B}_1$ est donnée par :

$$Mat_{\mathcal{B}_1}(x) = \begin{pmatrix} \langle x, w_1^* \rangle \\ \cdots \\ \langle x, w_n^* \rangle \end{pmatrix}$$

Problème : autour des lois de Pareto *(Vilfredo Pareto, économiste italien 1848-1923)*

Partie I

Soit a un réel fixé, avec $a > 0$. On considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_a(t) = \begin{cases} \dfrac{a}{t^{a+1}} & \text{si} \quad t \geq 1 \\ 0 & \text{si} \quad t < 1 \end{cases}$$

1. (a) La fonction f_a est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Montrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)dt$ converge et vaut 1.
Soit $A > 1$. Alors

$$\int_1^A \frac{a}{t^{a+1}}dt = [-\frac{1}{t^a}]_1^A = 1 - \frac{1}{A^a} \to_{A\to+\infty} 1$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(t)dt = 1$.

Bilan : $\boxed{f_a \text{ est une densité de probabilité d'une variable aléatoire } X}$

On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre a et on note $X \hookrightarrow \mathcal{VP}(a)$.

(b) Comme $X(\Omega) = [1, +\infty[$, pour tout $x < 1$, $F_a(x) = 0$. Pour tout $x \geq 1$,

$$F_a(x) = \int_1^x \frac{a}{t^{a+1}}dt = [-\frac{1}{t^a}]_1^x = 1 - \frac{1}{x^a}$$

Bilan : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, F_a(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{x^a} \text{ si } x \geq 1 \end{cases}}$

(c) Pour tout $x > 1$, $P(X > x) = 1 - F_a(x) = \frac{1}{x^a}$. On en déduit que

$$P_{[X>x]}(X > x+y) = \frac{P([X>x] \cap [X > x+y])}{P([X>x])} = \frac{P(X > x+y)}{P(X > x)} = \frac{x^a}{(x+y)^a} \sim_{x\to a} \frac{x^a}{x^a} = 1$$

donc on a bien $\boxed{\lim_{x\to+\infty} P_{[X>x]}(X > x+y) = 1}$

La loi de Pareto est une loi "à longue traîne". Par exemple si X est le temps de vie d'un composant, plus il a vécu plus il a de chances de vivre longtemps (le système "rajeunit")

2. (a) $E(X)$ existe si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t.f_a(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{a}{t^a}dt$ converge. D'après le cours sur les intégrales de Riemann, cette intégrale converge ssi $a > 1$. De plus si $a > 1$,

$$E(X) = \int_1^{+\infty} \frac{a}{t^a}dt = a. \int_1^{+\infty} t^{-a}dt = a. \lim_{A\to+\infty} [\frac{1}{-a+1}.t^{-a+1}]_1^A = \frac{a}{a-1}$$

Bilan : $\boxed{E(X) \text{ existe ssi } a > 1. \text{ Dans ce cas, } E(X) = \frac{a}{a-1}}$

(b) $E(X^2)$ existe si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2.f_a(t)dt = \int_1^{+\infty} \frac{a}{t^{a-1}}dt$ converge. D'après le cours sur les intégrales de Riemann, cette intégrale converge ssi $a - 1 > 1$ donc ssi $a > 2$. Dans ce cas,

$$E(X^2) = \int_1^{+\infty} \frac{a}{t^{a-1}}dt = a. \int_1^{+\infty} t^{-a+1}dt = a. \lim_{A\to+\infty} [\frac{1}{-a+2}.t^{-a+2}]_1^A = \frac{a}{a-2}$$

puis par la formule de Huygens,

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{a}{a-2} - (\frac{a}{a-1})^2 = \frac{a}{(a-1)^2(a-2)}$$

Bilan : $\boxed{V(X) \text{ existe ssi } a > 2 \text{ et dans ce cas } V(X) = \frac{a}{(a-1)^2(a-2)}}$

3. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1]$ et $R = U^{-\frac{1}{a}} = \frac{1}{U^{\frac{1}{a}}}$. Comme $U(\Omega) =]0,1]$, on a $R(\Omega) = [1;+\infty[$. Donc pour tout $x < 1$, $F_R(x) = 0$. Si $x \geq 1$,

$$F_R(x) = P(\frac{1}{U^{\frac{1}{a}}} \leq x) = P(U^{\frac{1}{a}} \geq \frac{1}{x}) = P(U \geq \frac{1}{x^a}) = 1 - P(U < \frac{1}{x^a}) = 1 - \frac{1}{x^a}$$

On remarque donc que pour tout $x \in R$, $F_R(x) = F_a(x)$, ce qui montre bien que $\boxed{R \text{ a la même loi que } X}$

Ceci va permettre de simuler X !!
Notons qu'il s'agit encore (!!!) une fois de la méthode d'inversion, guidée cette fois-ci...

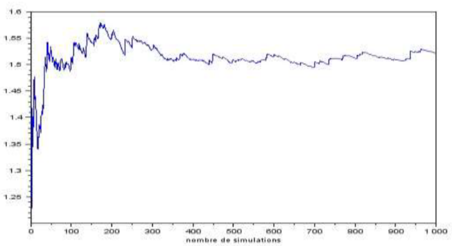
4. Le contenu de C est :

$$(\frac{X_1}{1}, \frac{X_1+X_2}{2}, \cdots, \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n})$$

La figure illustre la loi faible des grands nombres !!
Si on considère des variables X_1, ..., X_n indépendants suivant toutes la loi $\mathcal{VP}(a)$, qui admettent même espérance et même variance (elles existent car $a > 2$), d'après la loi faible des grands nombres,

$$\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} E(X) = \frac{a}{a-1} = \frac{3}{2}$$

ce qui correspond bien au résultat observé sur le graphique (la courbe en bleu tend vers 1.5) :



5. Soit Y et X deux variables aléatoires où $X = exp(Y)$.

- Supposons que Y suit une loi exponentielle de paramètre a. Alors $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$ donc $X(\Omega) = [1;+\infty[$. Par conséquent, pour tout $x < 1$, $F_X(x) = 0$. Si $x \geq 1$,

$$F_X(x) = P(e^Y \leq x) = P(Y \leq \ln(x)) = F_Y(\ln(x)) = 1 - e^{-a\ln(x)} = 1 - \frac{1}{x^a}$$

  Donc on a bien $X \hookrightarrow \mathcal{VP}(a)$.

- Réciproquement, supposons que X suit une loi de Pareto de paramètre a. Comme $X(\Omega) = [1;+\infty[$ et $Y = \ln(X)$, on a $Y(\Omega) = [0;+\infty[$. Donc pour tout $x < 0$, $F_Y(x) = 0$. Si $x \geq 0$,

$$F_Y(x) = P(\ln(X) \leq x) = P(X \leq e^x) = F_X(e^x) = 1 - \frac{1}{(e^x)^a} = 1 - e^{-ax}$$

  Donc on a bien $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$.

- Bilan : $\boxed{\text{si } X = exp(Y),\ X \hookrightarrow \mathcal{VP}(a) \Leftrightarrow Y \hookrightarrow \mathcal{E}(a)}$

6. Soient X et X' deux variables aléatoires indépendantes où $X \hookrightarrow \mathcal{VP}a$ et $X' \hookrightarrow \mathcal{VP}a'$, de densité f_a et $f_{a'}$.
On note $Y = ln(X)$, $Y' = ln(X')$, et on a donc $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(a)$ et $Y' \hookrightarrow \mathcal{E}(a')$.

(a) Comme $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$, $(-Y)(\Omega) = \mathbb{R}_-$. Donc pour tout $x > 0$, $F_{-Y}(x) = 1$. Si $x \leq 0$,

$F_{-Y}(x) = P(-Y \leq x) = P(Y \geq -x) = 1 - P(Y < -x) = 1 - F_Y(-x)$ car Y est à densité

donc

$$F_{-Y}(x) = 1 - (1 - e^{ax}) = e^{ax}$$

Bilan : $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ F_{-Y}(x) = \begin{cases} e^{ax} \text{ si } x \leq 0 \\ 1 \text{ si } x > 0 \end{cases}}$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ donc $-Y$ est à densité, et admet pour densité :

Bilan : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f_{-Y}(x) = \begin{cases} a.e^{ax} \text{ si } x \leq 0 \\ 0 \text{ si } x > 0 \end{cases}}$

(b) Comme Y et Y' sont indépendantes, par coalition Y' et $-Y$ sont indépendantes. De plus ce sont des variables à densité dont les densités sont bornées (par a). D'après le cours, $D = Y' - Y$ est à densité et une de ses densités est donnée par le produit de convolution :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_D(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y'}(t).F_{-Y}(x-t)dt$$

De plus,

$$f_{Y'}(t).F_{-Y}(x-t) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \geq 0 \\ x - t \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \geq 0 \text{ et } t \geq x$$

- 1er cas : si $x \geq 0$ alors

$$\begin{aligned} f_D(x) &= \int_x^{+\infty} a'.e^{-a't}.a.e^{a(x-t)}dt = aa'.e^{ax}.\int_x^{+\infty} e^{-(a+a')t}dt \\ &= aa'.e^{ax}.\lim_{A\to+\infty}\int_x^A e^{-(a+a')t}dt = aa'.e^{ax}.\lim_{A\to+\infty}[-\frac{1}{a+a'}e^{-(a+a')t}]_x^A \\ &= aa'.e^{ax}.\frac{1}{a+a'}.e^{-(a+a')x} \\ &= \frac{a.a'}{a+a'}.e^{-a'x} \end{aligned}$$

- 2ème cas : si $x < 0$ alors

$$\begin{aligned} f_D(x) &= \int_0^{+\infty} a'.e^{-a't}.a.e^{a(x-t)}dt = aa'.e^{ax}.\int_0^{+\infty} e^{-(a+a')t}dt \\ &= aa'.e^{ax}.\frac{1}{a+a'} \text{ d'après le cours} \\ &= \frac{a.a'}{a+a'}.e^{ax} \end{aligned}$$

- Bilan : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f_D(x)=\begin{cases}\frac{a.a'}{a+a'}.e^{ax} \text{ si } x<0\\ \frac{a.a'}{a+a'}.e^{-a'x} \text{ si } x\geq 0\end{cases}}$

(c) Par conséquent,

$$\begin{aligned}P(X\leq X') &= P(\ln(X)\leq \ln(X'))=P(Y\leq Y')\\ &= P(Y'-Y\geq 0)=\int_{-\infty}^{0} f_D(t)dt=\int_0^{+\infty}\frac{a.a'}{a+a'}.e^{-a't}dt\\ &= \frac{a.a'}{a+a'}.\int_0^{+\infty}e^{-a'.t}dt=\frac{a.a'}{a+a'}.\frac{1}{a'}=\frac{a}{a+a'}\end{aligned}$$

De plus, comme $P(X=X')=P(Y'-Y=0)=P(D=0)$ et que D est une variable à densité, $P(X=X')=P(D=0)=0$.

Partie II : autour du minimum

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, où pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, X_k suit la loi de Pareto de paramètre a_k strictement positif. On note pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $A_n=min(X_1,\cdots,X_n)$.

1. $A_n(\Omega)=[1;+\infty[$, donc $\forall x<1$, $F_{A_n}(x)=0$. Soit $x\geq 1$.

$$\begin{aligned}F_{A_n}(x) &= P(A_n\leq 1)=1-P(min(X_1,\cdots,X_n)>1)\\ &= 1-P(\cap_{k=1}^n[X_k>1])=1-\prod_{k=1}^n P(X_k>x) \text{ par indépendance de } X_1,\cdots,X_n\\ &= 1-\prod_{k=1}^n(1-F_{X_k}(x))\\ &= 1-\prod_{k=1}^n(1-(1-\frac{1}{x^{a_k}}))\\ &= 1-\prod_{k=1}^n\frac{1}{x^{a_k}}\\ &= 1-\frac{1}{x^{a_1+\cdots+a_n}}\end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{A_n \text{ suit la loi de Pareto de paramètre } a_1+\cdots+a_n}$

2. Soit $n\geq 2$. On considère les variables $X_n\hookrightarrow\mathcal{VP}(a_n)$ et $A_{n-1}=min(X_1,\cdots X_{n-1})\hookrightarrow\mathcal{VP}(a_1+...+a_{n-1})$ (cf question précédente). Comme $X_1,\cdots,X_n$ sont indépendantes, par coalition ces deux variables sont indépendantes. D'après le I.6.(c), on a alors

$$P(A_{n-1}\geq X_n)=\frac{a_n}{a_1+\cdots+a_{n-1}+a_n}$$

Mais d'autre part,

$$[A_{n-1}\geq X_n]=[min(X_1,\cdots,X_{n-1})\geq X_n]=[min(X_1,\cdots,X_n)=X_n]$$

donc enfin, $\boxed{P(X_n=min(X_1,\cdots,X_n))=\frac{a_n}{a_1+\cdots+a_n}}$

3. Interprétons le programme :
On effectue 10000 fois l'expérience aléatoire suivante : on simule X_1, ..., X_n de loi de Pareto (ou $X[0]$, ..., $X[n-1]$ avec le décalage Python...) de paramètres respectivement 1, 2, ..., n et on regarde si l'on a $X_n=min(X_1,...,X_n)$. On compte le nombre C de fois où cet événement est réalisé au cours des 10000 expériences, puis on calcule sa fréquence. Cette fréquence sera proche de la probabilité $P(X_n=min(X_1,\cdots,X_n))$ (d'après la loi faible des grands nombres). Si $n=100$ cette probabilité vaut

$$P(X_n=min(X_1,\cdots,X_n))=\frac{100}{1+2+\cdots+100}=100.\frac{1}{\frac{100\times101}{2}}=\frac{2}{101}\simeq 0.02$$

donc la valeur renvoyée par l'ordinateur est cohérente avec les résultats précédents.

Partie III : estimations du paramètre a

Soit a un réel fixé, où $a>0$.
Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Pareto de paramètre a. On note pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $Y_k=\ln(X_k)$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ où $n\geq 3$,

$$S_n=\sum_{k=1}^n\ln(X_k),\qquad \overline{Y_n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n Y_k,\qquad T_n=\frac{n-1}{S_n}=\frac{a.(n-1)}{a.S_n}$$

1. Comme les variables X_k sont indépendantes, par coalition les variables Y_1, ..., Y_n sont indépendantes. De plus, elles suivent toutes la même loi exponentielle de paramètre a, donc elles ont la même espérance $\frac{1}{a}$ et la même variance $\frac{1}{a^2}$. D'après la loi faible des grands nombres,

$$\overline{Y_n}\xrightarrow{P}\frac{1}{a}$$

2. (a) $aS_n=\sum_{k=1}^n a\ln(X_k)$. D'après le I.5, comme X_k soit une loi de Pareto de paramètre a, $\ln(X_k)\hookrightarrow\mathcal{E}(a)$. D'après le cours, $a.\ln(X_k)\hookrightarrow\mathcal{E}(1)$. Par coalition, les variables $a.\ln(X_k)$ sont indépendantes. Comme $\mathcal{E}(1)=\gamma(1)$, par stabilité pour la somme de la loi γ, on a enfin $\boxed{a.S_n\hookrightarrow\gamma(n)}$

D'après le cours, une densité de $a.S_n$ est

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f_{a.S_n}(x)=\begin{cases}0 \text{ si } x<0\\ \frac{1}{\Gamma(n)}.x^{n-1}.e^{-x}=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}.e^{-x} \text{ si } x\geq 0\end{cases}$$

(b) Comme les variables X_k sont indépendantes, par coalition les variables Y_1, ..., Y_n sont indépendantes. De plus, elles suivent toutes la même loi exponentielle de paramètre a, donc elles ont la même espérance $\frac{1}{a}$ et la même variance $\frac{1}{a^2}$. D'après le TCL,

$$\overline{Y_n}^*=\frac{\overline{Y_n}-E(\overline{Y_n})}{\sqrt{V(\overline{Y_n})}}\xrightarrow{\mathscr{L}}M$$

où M suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. De plus,

$$E(\overline{Y_n})=\frac{1}{n}.n.\frac{1}{a}=\frac{1}{a}$$

$$V((\overline{Y_n})=\frac{1}{n^2}.n.\frac{1}{a^2}=\frac{1}{na^2}$$

donc $\boxed{\overline{Y_n}^*=\frac{\overline{Y_n}-\frac{1}{a}}{\sqrt{\cdot\frac{1}{na^2}}}=\sqrt{n}.(a.\overline{Y_n}-1)) \text{ converge en loi vers } M\hookrightarrow\mathcal{N}(0,1)}$

3. (a) Comme $T_n = \frac{a.(n-1)}{a.S_n}$, on a d'après le théorème de transfert et sous réserve de convergence,

$$E(T_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a.(n-1)}{t}.f_{aS_n}(t)dt$$

D'après le III.1.a on a donc

$$\begin{aligned} E(T_n) &= a.(n-1).\int_0^{+\infty} \frac{1}{t}.\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.e^{-t}dt \\ &= \frac{a.(n-1)}{(n-1)!}.\int_0^{+\infty} t^{n-2}.e^{-t}dt = \frac{a}{(n-2)!}.\Gamma(n-1) \text{ donc } \; E(T_n) \text{ existe} \\ &= a \text{ car } \Gamma(n-1) = (n-2)! \end{aligned}$$

Par conséquent, $\boxed{T_n \text{ est bien un estimateur sans biais de } a}$

(b) Sous réserve de convergence, toujours d'après le théorème de transfert, comme $T_n^2 = \frac{a^2.(n-1)^2}{(a.S_n)^2}$,

$$\begin{aligned} E(T_n^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a^2.(n-1)^2}{t^2}.f_{a_S n}(t) \\ &= a^2.(n-1)^2.\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}.\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}.e^{-t}dt \\ &= a^2.(n-1)^2.\frac{1}{(n-1)!}.\int_0^{+\infty} t^{n-3}.e^{-t}dt \\ &= \frac{a^2.(n-1)}{(n-2)!}.\Gamma(n-2) \\ &= \frac{a^2.(n-1)}{(n-2)!}.(n-3)! \\ &= \frac{(n-1).a^2}{n-2} \end{aligned}$$

D'où

$$V(T_n) = E(T_n^2) - (E(T_n))^2 = \frac{(n-1).a^2}{n-2} - a^2 = \frac{a^2}{n-2}$$

Comme l'estimateur T_n est sans biais et $\lim_{n\to+\infty} V(T_n) = 0$, $\boxed{T_n \text{ est un estimateur convergent de } a}$

4. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $\epsilon > 0$,

$$P(|T_n - E(T_n)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(T_n)}{\epsilon^2} \Leftrightarrow P(|T_n - a| \geq \epsilon) \leq \frac{a^2}{(n-2).\epsilon^2}$$

Comme $1 < a < 2$, on a $\frac{a^2}{(n-2).\epsilon^2} \leq \frac{4}{(n-2).\epsilon^2}$.
D'où

$$P(|T_n - E(T_n)| \leq \epsilon) \geq P(|T_n - E(T_n)| < \epsilon) \geq 1 - \frac{4}{(n-2).\epsilon^2}$$

Avec $\epsilon = \frac{1}{10}$, ceci donne :

$$P(T_n - \frac{1}{10} \leq a \leq T_n + \frac{1}{10}) \geq 1 - \frac{400}{n-2}$$

On a alors $1 - \frac{400}{n-2} \geq 0.95$ ssi $\frac{400}{n-2} \leq 0.05$ ssi $n - 2 \geq \frac{400}{0.05} = 400 \times 20 = 8000$. Donc pour $n = 8002$, on a $P([T_n - \frac{1}{10} \leq a \leq T_n + \frac{1}{10}]) \geq 0.95$.

<u>Bilan :</u> $\boxed{\text{pour } n \geq 8002,\ [T_n - \frac{1}{10}, T_n + \frac{1}{10}] \text{ est un intervalle de confiance de } a \text{ au niveau de confiance } 0.95}$

5. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$ où $n \geq 3$, $Z_n = \frac{n}{S_n} = \frac{1}{\overline{Y_n}}$ et $\Delta_n = \frac{\sqrt{n}.(Z_n - a)}{a}$.

(a) *Classique, vu plusieurs fois en cours et en TD !!*
La fonction Φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec de plus $\lim_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$. Donc Φ est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]0,1[$. Comme $1 - \frac{\alpha}{2} \in]0,1[$, $\boxed{\text{il existe un unique réel } t_\alpha \text{ tel que } \Phi(t_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}}$

(b) Comme $\Delta_n \xrightarrow{\mathscr{L}} N$,

$$\lim_{n\to+\infty} P(|\Delta_n| \leq t_\alpha) = P(|N| \leq t_\alpha)$$

D'une part,

$$P(|N| \leq t_\alpha = P(-t_\alpha \leq N \leq t_\alpha) = \Phi(t_\alpha) - \Phi(-t_\alpha) = 2\Phi(t_\alpha) - 1 = 1 - \frac{\alpha}{2} - 1 = 1 - \alpha$$

D'autre part, $\Delta_n = \sqrt{n}.\frac{1}{a.\overline{Y_n}} - \sqrt{n}$ donc

$$\begin{aligned} [|\Delta_n| \leq t_\alpha] &= [|\sqrt{n}.\frac{1}{a.\overline{Y_n}} - \sqrt{n}| \leq t_\alpha] \\ &= [|\frac{1}{a.\overline{Y_n}} - 1| \leq \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}] = [-\frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{a.\overline{Y_n}} - 1 \leq \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}] \\ &= [1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{a.\overline{Y_n}} \leq 1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}}] \\ &= [\frac{1}{\overline{Y_n}.(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}})} \leq a \leq \frac{1}{\overline{Y_n}.(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{n}})}] \\ &= [\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + t_\alpha}.\frac{1}{\overline{Y_n}} \leq a \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} - t_\alpha}.\frac{1}{\overline{Y_n}}] \end{aligned}$$

Donc finalement,

$$\lim_{n\to+\infty} P(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + t_\alpha}.\frac{1}{\overline{Y_n}} \leq a \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} - t_\alpha}.\frac{1}{\overline{Y_n}}) = 1 - \alpha$$

<u>Bilan :</u> $\boxed{[\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + t_\alpha}.\frac{1}{\overline{Y_n}}, \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} - t_\alpha}.\frac{1}{\overline{Y_n}}]}$
est un intervalle de confiance asymptotique de a au niveau de risque α.