CB2 - sujet 2 type Maths II - Vendredi 14 mars 2025

Partie I : Etude de fonctions génératrices

1. Généralités
Soit X une variable aléatoire de densité f_X.

   (a) Si $x = 0$, $G_X(0) = E(e^{0.X}) = E(1) = 1$ puisqu'il s'agit de l'espérance d'une variable aléatoire certaine. Par conséquent, $0 \in \mathcal{D}_X$ et $G_X(0) = 1$.

   (b) Soit a et b deux réels tels que $a \neq 0$. Alors
$$G_{aX+b}(x) = E(e^{x.(aX+b)}) = e^{xb}.E(e^{ax.X}) = e^{xb}.G_X(ax)$$
Par conséquent, $x \in \mathcal{D}_{aX+b}$ si et seulement si $ax \in \mathcal{D}_X$ et si cela est défini, $G_{aX+b}(x) = e^{xb}.G_X(ax)$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi que X, on note $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.
Pour tout $x \in \mathcal{D}_X$,
$$\begin{aligned} G_{S_n}(x) &= E(e^{x.S_n}) = E(e^{x.X_1+\cdots+x.X_n}) \\ &= E(e^{x.X_1}.\cdots.e^{x.X_n}) \\ &= E(e^{x.X_1}).\cdots.E(e^{x.X_n}) \end{aligned}$$
En effet : si $x = 0$, cette relation est évidente. Si $x \neq 0$, comme X_1,..., X_n sont mutuellement indépendantes, par coalition les variables $e^{x.X_1}$, ..., $e^{x.X_n}$ sont indépendantes. D'où
$$G_{S_n}(x) = E(e^{x.X_1}).\cdots.E(e^{x.X_n}) = (G_X(x))^n$$
puisque X_1, ..., X_n sont de même loi que X.

   (d) Soit $x \in \mathcal{D}_X$. D'après le théorème de transfert,
$$G_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt} f_X(t)dt$$

2. Cas de la loi normale centrée-réduite
On suppose que $U \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors
$$\begin{aligned} G_U(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt}.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2-2xt}{2}}dt \\ &= e^{\frac{x^2}{2}}.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2-2xt+x^2}{2}}dt \\ &= e^{\frac{x^2}{2}}.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-x)^2}{2}}dt \end{aligned}$$

Soit Y une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(x,1)$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f_Y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-x)^2}{2}}$, d'où
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-x)^2}{2}}dt = 1$$
Par conséquent cette intégrale est convergente quel que soit le réel x. Donc G_U est définie sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$G_U(x) = e^{\frac{x^2}{2}}.1 = e^{\frac{x^2}{2}}$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. La variable U admet un moment d'ordre n ssi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n.f_U(t)dt$ est absolument convergente. La fonction $t \mapsto t^n.f_U(t)$ est paire si n est pair, et impaire si n est impair. Par conséquent, l'intégrale est de même nature que $\int_0^{+\infty} t^n.f_U(t)dt$. La fonction $t \mapsto t^n.f_U(t) = t^n.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc l'intégrale est impropre uniquement en $+\infty$. Par croissances comparées,
$$\frac{t^n.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{t^2}{2}}}{1/t^2} = t^{n+2}.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{t^2}{2}} \to_{t\to+\infty} 0$$
Par conséquent, $t^n.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{t^2}{2}} = o_{t\to+\infty}(\frac{1}{t^2})$. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), par négligeabilité (fonctions positives), $\int_1^{+\infty} t^n.f_U(t)dt$ converge. Par continuité sur $[0,1]$ de la fonction $t \mapsto t^n.f_U(t)$, finalement $\int_0^{+\infty} t^n.f_U(t)dt$ converge et $E(U^n)$ existe bien.

Bilan : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ E(U^n) \text{ existe}}$

   (c) Si n est impair, la fonction $t \mapsto t^n.f_U(t)$ est impaire. Par conséquent,
$$E(U^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n.f_U(t)dt = 0$$

   (d) Soit $p \geq 1$. Par parité,
$$E(U^{2p}) = 2.\int_0^{+\infty} t^{2p}.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$
Soit $A > 0$ et
$$I_A = \int_0^A t^{2p}.e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \int_0^A t^{2p-1}.t.e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$
Posons
$$\begin{cases} u(t) = t^{2p-1} \\ v'(t) = t.e^{-\frac{t^2}{2}} \end{cases} \to \begin{cases} u'(t) = (2p-1).t^{2p-2} \\ v(t) = -e^{-\frac{t^2}{2}} \end{cases}$$
Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,A]$ et on a donc par IPP :
$$I_A = [t^{2p-1}.(-e^{-\frac{t^2}{2}})]_0^A + (2p-1)\int_0^A t^{2p-2}.e^{-\frac{t^2}{2}}dt \to_{A\to+\infty} (2p-1)\int_0^{+\infty} t^{2p-2}.e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$
On a donc bien :
$$\boxed{\forall p \geq 1, \quad E(U^{2p}) = (2p-1).E(U^{2p-2})}$$

(e) Pour $p \in \mathbb{N}$,

$$E(U^{2p}) = (2p-1).(2p-3).\cdots.1.E(U^0) = \frac{(2p)!}{2p.(2p-2).\cdots.2} = \frac{(2p)!}{2^p.p!}$$

car $E(U^0) = 1$.

(f) On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E\left(U^n\right)}{n!} x^n = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{E\left(U^{2p}\right)}{(2p)!} x^{2p} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(\frac{x^2}{2})^p}{p!} = e^{\frac{x^2}{2}} = G_U(x)$$

3. Cas de la loi exponentielle
Soient λ un réel strictement positif, on suppose que $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$G_Y(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{xt}.f_Y(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{xt}.\lambda.e^{-\lambda.t}dt = \lambda.\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-x).t}dt$$

et cette intégrale converge ssi $\lambda - x > 0$, donc ssi $x < \lambda$.
On a alors $\mathcal{D}_Y =]-\infty, \lambda[$.
Si $x \in]-\infty, \lambda[$ alors

$$G_Y(x) = \frac{\lambda}{\lambda - x}$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E(Y^n) = \lambda.\int_0^{+\infty} t^n.e^{-\lambda.t}dt$. Posons $u = \lambda.t$. Ce CDV est affine non constant donc autorisé. Les deux intégrales suivantes sont donc de même natures et égales si elles sont convergentes :

$$\begin{aligned} E(Y^n) &= \lambda.\int_0^{+\infty} t^n.e^{-\lambda.t}dt = \lambda.\int_0^{+\infty} (\frac{u}{\lambda})^n.e^{-u}\frac{1}{\lambda}du \\ &= \frac{1}{\lambda^n}.\Gamma(n+1) = \frac{n!}{\lambda^n} \end{aligned}$$

Pour tout $x \in]-\lambda, \lambda[$, comme $|\frac{x}{\lambda}| < 1$, on a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E\left(Y^n\right)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{\lambda^n}.\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{x}{\lambda})^n = \frac{1}{1-\frac{x}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\lambda - x}$$

Bilan : $\boxed{\forall x \in]-\lambda, \lambda\left[, G_Y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{E(Y^n)}{n!} x^n\right.}$

(c) `Y=rd.exponential(1/2,n)` permet de simuler $(Y_1, ..., Y_n)$ un échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{E}(2)$. On calcule ensuite $M = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \exp(-Y_k)$, qui permet d'après la loi faible des grands nombres (par coalition, les variables e^{-Y_1}, ..., e^{-Y_n} sont indépendantes, ont même loi, espérance, variance) d'estimer $E(e^{-Y})$, c'est-à-dire $G_Y(-1) = \frac{2}{2-(-1)} = \frac{2}{3}$.
Il s'agit d'une application de la méthode de Monte Carlo.

4. Convergence
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose $\lambda > 0$ et $Y_1, \ldots, Y_n$ i.i.d selon la loi $\mathcal{E}(\lambda)$ et on note $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

- $E(Z_n) = \sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = \frac{n}{\lambda}$ par linéarité de l'espérance, et par indépendance des variables Y_1, ..., Y_n :

$$V(Z_n) = \sum_{i=1}^{n} V(Y_i) = \frac{n}{\lambda^2}$$

D'où

$$Z_n^* = \frac{Z_n - \frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}} = \frac{\lambda.Z_n - n}{\sqrt{n}} = \frac{\lambda}{\sqrt{n}}.Z_n - \sqrt{n}$$

- D'après le 1.c., la variable Z_n vérifie $\mathcal{D}_{Z_n} = \mathcal{D}_Y =]-\infty, \lambda[$, puis d'après le 1.(b), comme $Z_n^* = \frac{\lambda}{\sqrt{n}}.Z_n - \sqrt{n}$,

$$x \in \mathcal{D}_{Z_n^*} \Leftrightarrow ax \in \mathcal{D}_{Z_n} \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\sqrt{n}}.x \in]-\infty; \lambda[\Leftrightarrow x \in]-\infty; \sqrt{n}[$$

On a donc bien $\mathcal{D}_{Z_n^*} =]-\infty, \sqrt{n}[$. Pour tout $x < \sqrt{n}$,

$$\begin{aligned} G_{Z_n^*}(x) &= e^{-\sqrt{n}.x}.G_{Z_n}(\frac{\lambda}{\sqrt{n}}x) \\ &= e^{-\sqrt{n}.x}.(\frac{\lambda}{\lambda - \frac{\lambda}{\sqrt{n}}x})^n \\ &= e^{-\sqrt{n}.x}(1 - \frac{x}{\sqrt{n}})^{-n} \end{aligned}$$

(b) Pour tout $x < \sqrt{n}$,

$$G_{Z_n^*}(x) = e^{-\sqrt{n}.x}.e^{-n.\ln(1-\frac{x}{\sqrt{n}})} = e^{-\sqrt{n}.x - n.\ln(1-\frac{x}{\sqrt{n}})}$$

On sait qu'au voisinage de 0, $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. D'où

$$\ln(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}) = -\frac{x}{\sqrt{n}} - \frac{x^2}{2n} + o_{n\to+\infty}(\frac{1}{n})$$

Donc

$$G_{Z_n^*}(x) = e^{-\sqrt{n}.x + \sqrt{n}.x + \frac{x^2}{2} + o_{n\to+\infty}(1)} = e^{\frac{x^2}{2} + o_{n\to+\infty}(1)}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel fixé. A partir d'un certain rang n, $x < \sqrt{n}$, donc par continuité de la fonction exponentielle,

$$\lim_{n\to+\infty} G_{Z_n^*}(x) = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{x^2}{2} + o_{n\to+\infty}(1)} = e^{\frac{x^2}{2}} = G_U(x)$$

où $U \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

Ce résultat n'est pas très étonnant puisque d'après le Théorème Central Limite, $Z_n^* \xrightarrow{\mathcal{L}} U$ où $U \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$!

Partie II : Loi du χ^2 centrée

On suppose que $n \in \mathbb{N}^*$ et que $U_1, \dots, U_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi $\mathcal{N}(0,1)$, on note $W_n = \sum_{i=1}^n U_i^2$.

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\gamma(\nu)$ où $\nu > 0$
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$G_X(x) = \int_0^{+\infty} e^{tx}.\frac{1}{\Gamma(\nu)}.t^{\nu-1}.e^{-t}dt = \frac{1}{\Gamma(\nu)}.\int_0^{+\infty} t^{\nu-1}.e^{-(1-x).t}dt$$
   Si $x = 1$, alors $\int_0^{+\infty} t^{\nu-1}dt$ diverge quelle que soit la valeur de ν.
   Si $x > 1$, $1 - x < 0$ donc $1 - x > 0$ et $\lim_{t\to+\infty} t^{\nu-1}.e^{-(1-x).t} = +\infty$: l'intégrale est grossièrement divergente.
   Si $x < 1$, alors $1 - x > 0$ et on pose $u = (1 - x).t$. Il s'agit d'un changement de variables affine non constant, donc autorisé. L'intégrale définissant $G_X(x)$ est alors de même nature que
   $$\int_0^{+\infty} (\frac{u}{1-x})^{\nu-1}.e^{-u}.\frac{1}{1-x}du = \frac{1}{(1-x)^\nu}.\int_0^{+\infty} u^{\nu-1}.e^{-u}du = \frac{1}{(1-x)^\nu}.\Gamma(\nu)$$
   et donc cette intégrale est convergente. De plus,
   $$G_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}.\frac{1}{(1-x)^\nu}.\Gamma(\nu) = \frac{1}{(1-x)^\nu}$$
   Bilan : $\boxed{\mathcal{D}_X =]-\infty, 1[\text{ et que } \forall x \in D =]-\infty, 1[,\ G_X(x) = \frac{1}{(1-x)^\nu}}$

2. Programme Python simulant W_n :

```
n=int(input("Entrer n: "))
U=rd.normal(0,1,n)
W=np.sum(U**2)
print(W)
```

3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors
   $$\begin{aligned} G_{V_1}(x) &= E(e^{x.\frac{U_1^2}{2}}) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U_1}(t).e^{x.\frac{t^2}{2}}dt \text{ d'après le th. de transfert, sous réserve de convergence} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{t^2}{2}}.e^{x.\frac{t^2}{2}}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-x).\frac{t^2}{2}}dt \end{aligned}$$
   Si $1 - x \leq 0$, cette intégrale est grossièrement divergente. Si $1 - x > 0$, nous allons montrer ci-dessous par changement de variables que l'intégrale converge. On a alors $\mathcal{D}_{V_1} =]-\infty, 1[$. Si $1 - x > 0$, on effectue le changement de variables $u = \sqrt{1-x}.t$. Ce changement de variables est affine non constant donc autorisé. $du = \sqrt{1-x}.dt \Leftrightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{1-x}}.du$.
   On a alors sous réserve de convergence,
   $$\begin{aligned} G_{V_1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}.\frac{1}{\sqrt{1-x}}du \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x}}.1 = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \end{aligned}$$
   en reconnaissant l'intégrale de Gauss. Nous avons en particulier montré que cette intégrale converge si $x < 1$.

   Bilan : $\boxed{\mathcal{D}_{V_1} =]-\infty, 1[\text{ et pour tout } x < 1,\ G_{V_1}(x) = \frac{1}{(1-x)^{1/2}}}$

   (b) La variable V_1 a la même fonction génératrice qu'une variable suivant la loi $\gamma(1/2)$. D'après le résultat admis en préambule, on en déduit que $\boxed{V_1 \hookrightarrow \gamma(\frac{1}{2})}$

   (c) Les variables V_1, ..., V_n étant indépendantes par coalition, on en déduit par stabilité pour la somme de la loi γ que $\boxed{\frac{1}{2}.W_n \hookrightarrow \gamma(\frac{n}{2})}$

4. (a) On en déduit que $E(\frac{1}{2}W_n) = \frac{n}{2}$ et $V(\frac{1}{2}W_n) = \frac{n}{2}$, donc $E(W_n) = n$ et $V(W_n) = 2n$.

   Par ailleurs, $W_n(\Omega) = \mathbb{R}_+$ donc a pour densité $f_n(t) = 0$ si $t \leq 0$.
   Pour tout $t > 0$,
   $$F_{W_n}(t) = P(W_n \leq t) = P(\frac{1}{2}W_n \leq \frac{1}{2}.t)$$
   d'où en dérivant :
   $$f_{W_n}(t) = \frac{1}{2}.f_{\frac{1}{2}W_n}(\frac{t}{2}) = \frac{1}{2.\Gamma(\frac{n}{2})}.(\frac{t}{2})^{\frac{n}{2}-1}.e^{-\frac{t}{2}}$$
   Bilan : $\boxed{E(W_n) = n \text{ et } V(W_n) = 2n}$
   Et W_n a pour densité :
   $$\boxed{f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}t^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{t}{2}} & \text{si } t > 0 \end{cases}}$$
   On dit que W_n suit la loi du χ^2 centré à n degrés de liberté notée $\chi^2(n)$

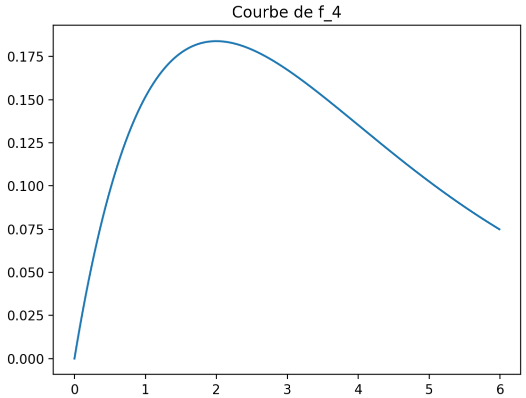
   (b) La fonction f_4 est définie par :
   $$f_4(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{4}t.e^{-\frac{t}{2}} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$
   Pour tout $t > 0$,
   $$f_4'(t) = \frac{1}{4}.(e^{-\frac{t}{2}} - \frac{t}{2}.e^{-\frac{t}{2}}) = \frac{1}{4}.e^{-\frac{t}{2}}.(1 - \frac{t}{2})$$
   donc cette dérivée s'annule en $t = 2$. De plus
   $$f''(t) = \frac{1}{4}.e^{-\frac{t}{2}}.(-\frac{1}{2} + \frac{t}{4} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}.e^{-\frac{t}{2}}.(-1 + \frac{t}{4})$$

et on a donc un point d'inflexion pour $t = 4$. Enfin,

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f_4(t) - f_4(0)}{t - 0} = \frac{1}{4}$$

donc la fonction admet une demi-tangente de pente $\frac{1}{4}$ au point d'abscisse 0.

Tout ceci nous permet d'esquisser la courbe de f_4 :



5. Comme $\frac{1}{2}W_n \hookrightarrow \gamma(\frac{n}{2})$, on sait que $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}W_n} =]-\infty, 1[$. D'après le 1.b., $\mathcal{D}_{W_n} =]-\infty, \frac{1}{2}[$ et de plus, $\forall x < \frac{1}{2}$,
$$G_{W_n}(x) = G_{\frac{1}{2}W_n}(2x) = (1-2x)^{-\frac{n}{2}}$$

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note F_n la fonction de répartition de W_n.
La fonction f_n est continue sur $[0; +\infty[$ et strictement positive. Par conséquent, F_n est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, bijective de $]0; +\infty[$ sur $]F_n(0); \lim_{x \to +\infty} F_n(x)[=]0, 1[$.

Partie III : Loi du χ^2 décentrée

On considère une suite $(M_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoire mutuellement indépendantes telles que, pour $i \in \mathbb{N}^*, M_i \hookrightarrow \mathcal{N}(m_i, 1)$ où $m_i \in \mathbb{R}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{i=1}^n M_i^2$ et $\lambda_n = \sum_{i=1}^n m_i^2$
On dit que S_n suit la loi du χ^2 décentré à n degrés de liberté notée $\chi^2(n, \lambda_n)$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, par linéarité de l'espérance,
$$E(S_n) = \sum_{i=1}^n E(M_i^2)$$
Or pour tout $i \in [[1, n]]$,
$$E(M_i^2) = V(M_i) + E(M_i)^2 = 1 + m_i^2$$
donc $\boxed{E(S_n) = n + \lambda_n}$

2. (a) Soit $x < \frac{1}{2}$. D'après le théorème de transfert et sous réserve de convergence,
$$\begin{aligned}
G_{M_1^2}(x) &= E(e^{x.M_1^2}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{M_1}(t).e^{xt^2}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-m_1)^2}{2}}.e^{xt^2}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-m_1)^2-2xt^2}{2}}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2-2m_1t+m_1^2-2xt^2}{2}}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(1-2x).t^2-2m_1t+m_1^2}{2}}dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\sqrt{1-2x}.t-\frac{m_1}{\sqrt{1-2x}})^2-\frac{m_1^2}{1-2x}+m_1^2}{2}}dt \\
&= e^{\frac{1}{2}(\frac{m_1^2}{1-2x}-m_1^2)}.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\sqrt{1-2x}.t-\frac{m_1}{\sqrt{1-2x}})^2}{2}}dt \\
&= e^{\frac{x.m_1^2}{1-2x}}.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(\sqrt{1-2x}.t-\frac{m_1}{\sqrt{1-2x}})^2}{2}}dt
\end{aligned}$$
On pose alors $u = \sqrt{1-2x} - \frac{m_1}{\sqrt{1-2x}}$. Il s'agit d'un changement de variables affine non constant donc autorisé, avec
$$du = \sqrt{1-2x}dt \Leftrightarrow dt = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}du$$
D'où
$$\begin{aligned}
G_{M_1^2}(x) &= e^{\frac{x.m_1^2}{1-2x}}\frac{1}{\sqrt{1-2x}}.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du \\
&= e^{\frac{x.m_1^2}{1-2x}}\frac{1}{\sqrt{1-2x}} \quad \text{(intégrale de Gauss)}
\end{aligned}$$
Bilan : $\boxed{\forall x < \frac{1}{2}, G_{M_1^2}(x) = (1-2x)^{-\frac{1}{2}} \times \exp\left(\frac{m_1^2 x}{1-2x}\right)}$

(b) Pour tout $x < \frac{1}{2}$,
$$\begin{aligned}
G_{S_n}(x) &= E(e^{x.\sum_{i=1}^n M_i^2}) \\
&= E(e^{x.M_1^2} \times \cdots \times e^{x.M_n^2})
\end{aligned}$$
Comme M_1, ..., M_n sont indépendantes, par coalition $e^{x.M_1^2}$, ..., $e^{x.M_n^2}$ sont indépendantes. On a donc
$$\begin{aligned}
G_{S_n}(x) &= \prod_{i=1}^n E(e^{x.M_i^2}) \\
&= \prod_{i=1}^n G_{M_i^2}(x) \\
&= (1-2x)^{-\frac{n}{2}}.e^{\sum_{i=1}^n \frac{m_i^2.x}{1-2x}} \\
&= (1-2x)^{-\frac{n}{2}}.e^{\lambda_n \cdot \frac{x}{1-2x}}
\end{aligned}$$

3. Nombre aléatoire de degrés de liberté
Soit $\lambda > 0$, on note K une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ et indépendante de la suite $(U_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ définie dans la partie II..
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $H_n = U_1^2 + U_2^2 + \ldots + U_{n+2K}^2$ et on admet que H_n est une variable aléatoire à densité.

(a)
```
def H(n,lambda):
    K=rd.poisson(lambda)
    H=0
    for k in range(1,n+2*K+1):
        U=rd.normal(0,1)
        H=H+U**2
  return H
```
(b) Soit $k \in \mathbb{N}$.
- La loi de H_n conditionnelle à $(K = k)$ est la loi du Khi-deux centrée à $n+2k$ degrés de liberté.
- On a donc $E\left(H_n \mid (K = k)\right) = E(W_{n+2k}) = n + 2k$

(c) D'après la formule de l'espérance conditionnelle dans le SCE $([K = k])_{k\in\mathbb{N}}$, sous réserve de convergence (absolue) :

$$\begin{aligned}
E(H_n) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(K = k).E\left(H_n \mid (K = k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}.e^{-\lambda}.(n + 2k) \\
&= n.\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}.e^{-\lambda} + 2.\sum_{k=0}^{+\infty} k.\frac{\lambda^k}{k!}.e^{-\lambda} \\
&= n + 2.\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!}.e^{-\lambda} \\
&= n + 2.\lambda.\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^i}{i!}.e^{-\lambda} \\
&= n + 2\lambda
\end{aligned}$$

(d) Soit $k \in \mathbb{N}$ et $x < \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
E\left(e^{xH_n} \mid (K = k)\right) &= E(e^{x.W_{n+2k}}) \\
&= G_{W_{n+2k}}(x) \\
&= (1 - 2x)^{-\frac{n+2k}{2}}
\end{aligned}$$

(e) D'après la formule de l'espérance totale, toujours dans le SCE $(K = k)_{k\in\mathbb{N}}$, on

en déduit que

$$\begin{aligned}
G_{H_n}(x) &= E(e^{xH_n}) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} P(K = k).E\left(e^{xH_n} \mid (K = k)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}.e^{-\lambda}.(1 - 2x)^{-\frac{n+2k}{2}} \\
&= (1 - 2x)^{-\frac{n}{2}}.\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!}.e^{-\lambda}.(1 - 2x)^{-k} \\
&= (1 - 2x)^{-\frac{n}{2}}.\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\frac{\lambda}{1-2x})^k}{k!}.e^{-\lambda} \\
&= (1 - 2x)^{-\frac{n}{2}}.e^{-\lambda}.e^{\frac{\lambda}{1-2x}} \\
&= (1 - 2x)^{-\frac{n}{2}}.e^{\frac{2x\lambda}{1-2x}}
\end{aligned}$$

et on reconnait la fonction génératrice de la loi du Khi-deux décentrée à n degrés de liberté $\chi^2(n, 2\lambda)$. Par conséquent $\boxed{H_n \hookrightarrow \chi^2(n, 2\lambda)}$

Partie IV : Estimations de la variance d'une loi normale

Pour cette partie, m est un réel, σ un réel strictement positif.
On considère une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On cherche à estimer σ^2 par intervalle de confiance

On suppose pour les questions de 1. à 3. que m est connue Pour tout $n \geq 2$, on note $T_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - m)^2$

1. $$\frac{n}{\sigma^2}T_n = \sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i - m}{\sigma})^2$$

   Pour tout $i \in [[1, n]]$, $\frac{X_i-m}{\sigma}$ est la variable centrée réduite associé à X_i, donc par stabilité de la loi normale par transformation affine, $\frac{X_i-m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$. De plus par coalition les variables $\frac{X_i-m}{\sigma}$ sont mutuellement indépendantes. On en déduit que $\boxed{\frac{n}{\sigma^2}T_n \text{ suit la loi du } \chi^2 \text{ à } n \text{ degrés de liberté}}$

2. Comme $\frac{n}{\sigma^2}T_n$ suit la loi du $\chi^2(n)$, on a $E(\frac{n}{\sigma^2}T_n) = n$ donc $E(T_n) = \sigma^2$: T_n est bien un estimateur sans biais de σ^2. De plus, d'après la loi faible des grands nombres, comme les variables $(X_i - m)^2$ sont indépendantes, de même espérance égale à σ^2 (par définition de la variance) et même variance, on a

   $$T_n \xrightarrow{P} \sigma^2$$

   Bilan : $\boxed{T_n \text{ est un estimateur sans biais et convergent de } \sigma^2}$

3. Soit $\alpha \in]0, 1[$

(a) Nous avons déjà vu que la fonction F_n est continue, strictement croissante, bijective de $]0;+\infty[$ sur $]0,1[$. Pour tout $\alpha \in]0,1[$,

$$1-\alpha > 0 \Leftrightarrow 1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2} > 0 \Leftrightarrow 1-\frac{\alpha}{2} > \frac{\alpha}{2}$$

Comme $\frac{\alpha}{2} \in]0,1[$, $F_n^{-1}(\frac{\alpha}{2}) > 0$, et comme $1-\frac{\alpha}{2} > \frac{\alpha}{2}$, par stricte croissance de F_n^{-1} (qui est de même sens de variation que F_n), $F_n^{-1}(\frac{\alpha}{2}) < F_n^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})$.
Ainsi $\boxed{0 < F_n^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) < F_n^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}$

On en déduit que

$$\begin{aligned} & P\left(F_n^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{n}{\sigma^2}T_n \leq F_n^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) \\ = & P\left(F_n^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) < \frac{n}{\sigma^2}T_n \leq F_n^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) \quad (T_n \text{ variable à densité}) \\ = & F_n(F_n^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)) - F_n(F_n^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)) \\ = & 1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2} = 1-\alpha \end{aligned}$$

(b) On a donc

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= P\left(F_n^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \leq \frac{n}{\sigma^2}T_n \leq F_n^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\right) \\ &= P\left(\frac{1}{F_n^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})} \leq \frac{\sigma^2}{nT_n} \leq \frac{1}{F_n^{-1}(\frac{\alpha}{2})}\right) \\ &= P\left(\frac{nT_n}{F_n^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})} \leq \sigma^2 \leq \frac{nT_n}{F_n^{-1}(\frac{\alpha}{2})}\right) \end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{P\left[\frac{nT_n}{F_n^{-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)};\frac{nT_n}{F_n^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right] \text{ est un intervalle de confiance pour } \sigma^2 \text{ au risque } \alpha}$

Pour la suite de cette partie m est inconnue

4. n est un entier supérieur ou égal à 2 , on munit $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique et on note $M_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ et $V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2$

(a) Question facile : il suffit d'utiliser encore une fois la linéarité de l'espérance et la loi faible des grands nombres.
On montre aisément que $\boxed{M_n \text{ est un estimateur sans biais et convergent de } m}$

(b)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_i - M_n)^2 &= \sum_{i=1}^n \left(X_i^2 - 2X_i.M_n + M_n^2\right) \\ &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2.M_n.\sum_{i=1}^n X_i + n.M_n^2 \\ &= \sum_{i=1}^n X_i^2 - 2n.M_n^2 + n.M_n^2 \\ &= = \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2 \end{aligned}$$

5. Pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $Q_n(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2$.

(a) La forme quadratique Q_n peut se réécrire :

$$Q_n(x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum_{i=1}^n x_i^2 + 2.\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j) = (1-\frac{1}{n}).\sum_{i=1}^n x_i^2 - 2.\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{1}{n}.x_i x_j$$

et la matrice symétrique A associée à cette forme quadratique est d'après le cours :

$$A = \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -\frac{1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} \end{pmatrix} = I_n - \frac{1}{n}.J$$

où J est la matrice remplie de 1. Cette matrice est donc bien donnée en Python par la formule `A=eye(n)-1/n*np.ones([n,n])`.

(b) On remarque que

$$\begin{aligned} A^2 &= (I_n - \frac{1}{n}J)^2 \\ &= I_n^2 - \frac{2}{n}I_n.J + \frac{1}{n^2}.J^2 \quad (I_n \text{ et } J \text{ commutent}) \\ &= I_n - \frac{2}{n}J + \frac{1}{n^2}.nJ = I_n - \frac{1}{n}.J \\ &= A \end{aligned}$$

Donc $\boxed{A \text{ est bien la matrice dans la base canonique de } \mathbb{R}^n \text{ d'un projecteur orthogonal.}}$

(c) On remarque que

$$\begin{aligned} rg(A) &= rg\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & n-1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix} \quad \text{(en multipliant tout par n)} \\ &= rg\begin{pmatrix} n-1 & -n & -n & \cdots & -n \\ -1 & n & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix} \quad \text{(on soustrait la première colonne aux autres)} \\ &= rg\begin{pmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(on divise toutes les colonnes par } n \text{ sauf la 1ère)} \\ &= rg\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(on ajoute toutes les colonnes sur la première)} \\ &= n-1 \end{aligned}$$

(d) La matrice A est symétrique donc orthodiagonalisable. De plus il s'agit de la matrice d'un projecteur, donc $Sp(A) \subset \{0,1\}$. Comme $rg(A) = n-1$, on a $\dim(Ker(A)) = 1$, et comme $\sum_{\lambda \in Sp(A)} \dim(Ker(A - \lambda.I)) = n$, $\dim(Ker(A - I)) = n-1$. Il existe donc bien une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D, telles que $A = P.D.{}^tP$, où $D = Diag(1, ..., 1, 0)$.

6. On note $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$, et on pose $Y = {}^tP.X$. On note $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$.

   D'après la question 4.b., on reconnait que

$$V_n = Q(X_1, ..., X_n) = Q(X)$$

   D'après le lien entre une forme quadratique et sa matrice,

$$Q(X) = {}^tX.A.X = {}^tX.P.D.{}^tP.X = {}^tY.D.Y$$

   et comme $D = Diag(1, ..., 1, 0)$,

$$Q(X) = Y_1^2 + \cdots + Y_{n-1}^2$$

7. **On admet que les variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_{n-1}, Y_n$ sont mutuellement indépendantes et qu'elles suivent toutes la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$**

   (a) On a alors $\frac{1}{\sigma^2} Q_n(X) = \sum_{i=1}^{n-1} (\frac{Y_i}{\sigma})^2$. Pour tout i, $\frac{Y_i}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ et les variables $\frac{Y_i}{\sigma}$ sont indépendantes par coalition. On en déduit que la variable $\frac{1}{\sigma^2} Q_n(X)$ suit la loi $\chi^2(n-1)$.

   (b) En adaptant les calculs du 3. (a), on trouve alors que

$$1 - \alpha = P\left(\frac{Q_n(X)}{F_{n-1}^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})} \leq \sigma^2 \leq \frac{Q_n(X)}{F_{n-1}^{-1}(\frac{\alpha}{2})}\right)$$

   Bilan : $\boxed{[\frac{Q_n(X)}{F_{n-1}^{-1}(1-\frac{\alpha}{2})}; \frac{Q_n(X)}{F_{n-1}^{-1}(\frac{\alpha}{2})}] \text{ est un intervalle de confiance de } \sigma^2 \text{ au niveau de confiance } 1-\alpha}$