Éléments de correction

Exercice 1

1) a) Les colonnes de J_n sont toutes égales et non nulles donc rg(J_n) = 1. Ceci prouve que J_n n'est pas inversible (car J_n est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $n \geq 2$), c'est-à-dire que 0 est valeur propre de J_n , associée à un sous-espace propre qui est de dimension $n-1$ (grâce à la formule du rang). En effet, en considérant J_n comme la matrice d'un endomorphisme φ_n de $\mathbb{R}^n$ relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a $\text{rg}(\varphi_n) = 1$ donc $\dim \text{Ker}(\varphi_n) = n-1$, puisque $\mathbb{R}^n$ est de dimension n.

b) On trouve $J_n V_n = J_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

Cette égalité montre que n est valeur propre de J_n associée à un sous-espace propre de dimension au moins égale à 1 puisque $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas le vecteur nul..

c) Comme la somme des dimensions des sous-espaces propres de J_n ne peut pas excéder n, on est certain que 0 est valeur propre associée à un sous-espace propre de dimension $n-1$, et que n est valeur propre associée à un sous-espace propre de dimension 1. Il n'y a donc pas d'autre valeur propre, et ainsi, les valeurs propres de J_n sont 0 et n

Remarque. On pouvait utiliser le polynôme $x \mapsto x^2 - nx$ qui annule J_n .

2) La fonction f_n est une fonction polynomiale des n variables $x_1, x_2, ..., x_n$ donc elle est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.

3) a) Comme $f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2$, on a, grâce aux règles de dérivation :

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \partial_i f_n(x) = \frac{1}{n} \times 2x_i - \frac{1}{n^2} \times 2 \times 1 \times \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Conclusion :

$$\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!],\ \partial_i f_n(x) = \frac{2}{n} x_i - \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} x_k}$$

b) Les points critiques de f sont les points qui annulent le gradient de f_n, ce sont donc les $x=(x_1,\, x_2,\, ...,\, x_n)$ pour lesquels, en notant $S_n=\sum_{k=1}^{n} x_k$:

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ x_i=\frac{S_n}{n}\ (L_i)$$

En conservant la première équation et en effectuant les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - L_1$, ceci équivaut à : $x_1=\frac{S_n}{n}$ et $x_1=x_2=...=x_n$. La première équation n'apporte rien (car en y remplaçant chaque x_i par x_1, elle donne $x_1=x_1$).

Bilan : les points critiques de f sont les n-uplets $(a,a,...,a)\in\mathbb{R}^n$.

4) a) Les dérivées partielles d'ordre 2 de f_n sont :

- Pour $j \neq i$: $\partial^2_{i,j}(f_n)(x)=-\frac{2}{n^2}$.
- Pour $j=i$: $\partial^2_{i,i}(f_n)(x)=\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}=\frac{2(n-1)}{n^2}$.

b) La hessienne de f_n en a est :

$$\nabla^2 f_n(a,...,a)=\frac{2}{n^2}\begin{pmatrix} n-1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \ddots & (-1) & \vdots \\ \vdots & (-1) & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{pmatrix}=\frac{2}{n^2}(nI_n-J_n)$$

c) Avec `Python`, la matrice I_n se calcule avec `np.eye(n,n)` et la matrice J_n se calcule avec `np.ones((n,n))`.

Comme $\nabla^2 f_n(a,...,a)=\frac{2}{n^2}(nI_n-J_n)$, les commandes `Python` permettant de calculer et d'afficher $\nabla^2 f_n(a,...,a)$ pour une valeur de n entrée par l'utilisateur sont donc :

```
n=int(input('entrez la valeur de n :'))
I=np.eye(n,n)
J=np.ones((n,n))
Hessienne=(n*I-J)*2/n**2
print(Hessienne)
```

d) La matrice J_n étant diagonalisable (symétrique réelle), il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D_n telle que : $J_n=PD_nP^{-1}$.

Comme $\nabla^2 f_n(a,...,a) = \dfrac{2}{n^2}(nI_n - J_n)$, on peut écrire :

$$\nabla^2 f_n(a,...,a) = \frac{2}{n^2}(nPI_nP^{-1} - PD_nP^{-1}) = \frac{2}{n^2}P(nI_n - D_n)P^{-1}$$

On a donc : $\nabla^2 f_n(a,...,a) = P\left(\dfrac{2}{n^2}(nI_n - D_n)\right)P^{-1}$.

D'après la question 1), 0 est valeur propre de J_n, associée à un sous-espace propre de dimension $n-1$ et n est valeur propre de J_n, associée à un sous-espace propre de dimension 1 donc on peut choisir $D_n = \begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ (0) & & & n \end{pmatrix}$ et on a

$$nI_n - D_n = \begin{pmatrix} n & & & (0) \\ & \ddots & & \\ & & n & \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, les éléments diagonaux de $\dfrac{2}{n^2}(nI_n - D_n)$ sont $\dfrac{2}{n}$ et 0.

Bilan : les valeurs propres de $\nabla^2 f_n(a,...,a)$ sont $\dfrac{2}{n}$ et 0.

Pour finir, une des valeurs propres de $\nabla^2 f_n(a,...,a)$ est nulle, donc cette méthode ne permet pas de conclure quant à l'existence ou non d'extrema en les points critiques de f_n puisque les valeurs propres de $\nabla^2 f_n(a,...,a)$ sont positives, mais pas toutes strictement positives.

5) a) Pour deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit : $\langle x, y\rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$.

En choisissant $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $y = (1,...,1)$, on trouve :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k \times 1\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} 1^2\right)$$

En simplifiant avec $\sum_{k=1}^{n} 1^2 = n$, on a finalement :

$$\boxed{\forall\ (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

b) En divisant par n^2, l'inégalité précédente s'écrit $\left(\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2$, ce qui prouve que f_n est une fonction positive.

Le minimum 0 n'est atteint que dans le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, à savoir quand les vecteurs $(x_1, x_2, ..., x_n)$ et $(1, 1, ..., 1)$ sont proportionnels, c'est-à-dire quand $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est un point critique de f_n.
Ainsi, 0 est un minimum global de f_n atteint en chaque point critique $(a, ..., a)$.

6) a) Après avoir simplifié, on trouve $f_2(x, y) = \dfrac{(x-y)^2}{4}$ et on peut proposer :

```
def f_2(x,y):
    z=(x-y)**2/4
    return z
```

b) La surface N°1 est la seule qui représente une fonction semblant posséder un minimum global égal à 0 atteint en chaque point (x, x), ce qui correspond aux résultats obtenus précédemment.

Exercice 2

1) a) Pour tout réel *x*, on a :

$$\boxed{\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{x^2+1}}$$

b) Pour tout réel *x* strictement positif, posons : $h(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

La fonction *h* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a : $h'(x) = \dfrac{1}{x^2+1} + \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \times \dfrac{1}{\dfrac{1}{x^2}+1}$.

En arrangeant : $h'(x) = \dfrac{1}{x^2+1} + \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) \times \dfrac{x^2}{x^2+1} = \dfrac{1}{x^2+1} - \dfrac{1}{x^2+1} = 0$.

La fonction h' est nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ est un intervalle donc *h* est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

De plus, comme $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1$, on en déduit $\text{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4}$ donc $h(1) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$, on en déduit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}}$$

c) Par définition du nombre dérivé en 0 de la fonction arctangente, on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{Arctan}(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(0)}{x - 0} = \text{Arctan}'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1$$