Python td 12 - Révisions

Tous les programmes ci-dessous commenceront par :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
```

Exercice 1
Ecricome 2024
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $X = (x_0, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Ecrire une fonction nommée `prodX`, prenant en entrée X, un entier i et un entier k (on suppose $i \leq k \leq n$) et qui renvoie le produit $\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{k}(x_i - x_j)$.

Exercice 2
EML 2023
Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On a montré (de façon classique à savoir dérouler quasi par coeur) que $S_n \sim_{n\to+\infty} \ln(n)$.

1. On considère la fonction Python suivante :

```
def rang(a):
    k=1
    s=1
    while s<a:
        k=k+1
        s=s+1/k
    return k
```

   Expliquer ce que produit l'appel rang(50).

2. Le code suivant

```
np.exp(49)
```

   renvoie : `1.90734657e+21`
   Expliquer rapidement ce que cela laisse penser si l'on fait l'appel `rang(50)`.

Exercice 3
Edhec 2015 ECS

On considère deux suites réelles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$I_n + I_{n+1} = \frac{1}{n+2}, \quad J_n + J_{n+1} = I_{n+1}, \quad J_0 = \frac{1}{2}, \quad I_1 = \ln(2)$$

Compléter le programme Python ci-dessous afin qu'il calcule les valeurs de I_n et J_n.

```
n=int(input("Entrer n supérieur ou égal à 2 :"))
I=np.log(2)
J=1/2
J=.....
for k in range(2,n+1):
    I=.......
    J=........
print(I,J)
```


Exercice 4
Ecricome 2015 ECS

On définit pour tout entier naturel n, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $a_0 = \sqrt{\frac{3}{2}}$, $b_0 = \frac{1}{2}$ et

$$a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-b_n}{2}}\ (*) \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{\frac{1+b_n}{2}}\ (**)$$

On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$9 \times 2^n . \frac{a_n}{2+b_n} < \pi < 2^n . (2a_n + \frac{a_n}{b_n})$$

On admet enfin que $a_n \sim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{3.2^n}$ et $b_n \sim_{n\to+\infty} 1$.

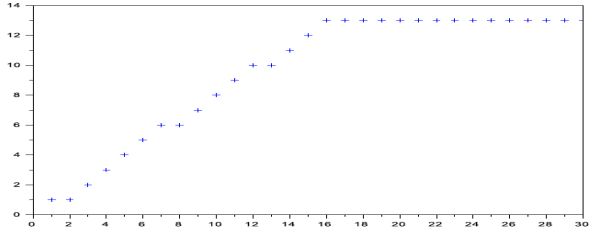
Justifier que les deux termes de l'encadrement précédent tendent vers π quand n tend vers $+\infty$.

Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle retourne, à l'aide des relations $(*)$ et $(**)$ et des résultats admis, une approximation de π à e près, ainsi que le nombre d'itérations nécessaire.

```
def h(e):
    k=0
    a=np.sqrt(3/2)
    b=1/2
    while .......:
        a=......
        b=......
        k=.......
    x=......
    return x,k
```

On souhaite étudier l'évolution du nombre d'itérations nécessaires en fonction de la précision souhaitée. Ecrire une fonction Python qui prend comme paramètre d'entrée un paramètre p et qui retourne un vecteur de taille p qui contient les nombres d'itérations nécessaires pour les précisions 10^{-k}, pour $k \in \{1, 2, \cdots, p\}$.

On utilise la fonction précédente avec $p = 30$ et on représente graphiquement les valeurs obtenues. On obtient le graphe suivant :



Commenter ce graphe.

Exercice 5
Edhec 2015 ECE
Un joueur réalise une suite de lancers indépendants d'une pièce. Cette pièce donne Pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et Face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On note N la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier Pile.
Si N prend la valeur n, le joueur place n boules numérotées de 1 à n dans une urne, puis il extrait une boule au hasard de cette urne. On dit que le joueur a gagné si le numéro porté par la boule tirée est impair et on note A l'événement "le joueur gagne". On appelle X la variable aléatoire égale au numéro porté par la boule extraite de l'urne.

1. Si m est un entier naturel, que renvoie la commande $2 * np.floor(m/2)$?

2. Compléter les commandes Python suivantes pour qu'elles simulent N et X et qu'elles renvoient l'un des deux messages "le joueur a gagné" ou "le joueur a perdu".

```
p=float(input(p"="))
N=......
X=........
if ....... :
      print(".......")
else :
      print(".........")
```

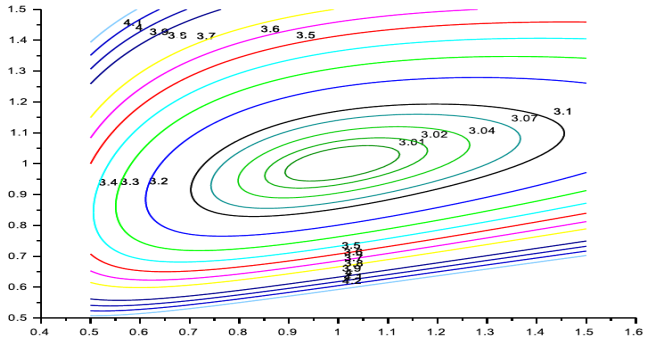
Exercice 6
Edhec 2024
On considère une suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant : $J_1 = \frac{\pi}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = 2n(J_n - J_{n+1})$. Compléter le programme suivant pour qu'il renvoie la valeur de J_n :

```
def suiteJ(n):
   J=-----
   for k in range(2,n+1):
      J=--------
   return J
```

Exercice 7
Ecricome 2019 ECE
On considère la fonction f définie sur l'ouvert $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ par :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad f(x,y) = \frac{x}{y^2} + y^2 + \frac{1}{x}$$

1. On utilise Python pour tracer les lignes de niveau de la fonction f. On obtient le graphe suivant :



Etablir une conjecture à partir du graphique quant à l'existence d'un extremum local pour f, dont on donnera la nature, la valeur approximative et les coordonnées du point où il semble être atteint.

2. Pour tout entier non nul, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h_n(x) = f(x^n, 1) = x^n + 1 + \frac{1}{x^n}$$

On admet que l'équation $h_n(x) = 4$ admet exactement deux solutions, notées u_n et v_n et vérifiant : $0 < u_n < 1 < v_n$.

(a) Ecrire une fonction Python d'en-tête `def h(n,x):` qui renvoie la valeur de $h_n(x)$.

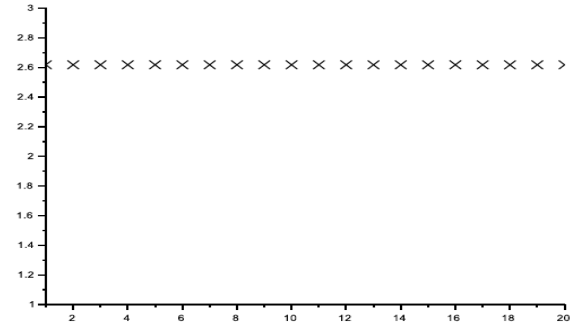
(b) Compléter la fonction suivante, pour qu'elle renvoie une valeur approchée à 10^{-5} près de v_n par la méthode de dichotomie lorsqu'on lui fournit $n \geq 1$ en entrée :


```
def v(n):
   a=1
   b=3
   while (b-a)>10**(-5):
        c=(a+b)/2
        if h(n,c)<4 :
             ........
        else :
             .........
return ......
```

(c) A la suite de la fonction v, on écrit le code suivant :

```
X=np.arange(1,21,1)
Y=np.zeros(1,20)
for k in range(1,21):
    Y[k]=v[k]**k
plt.plot(X,Y)
```

A l'exécution du programme, on obtient la sortie graphique suivante :



Expliquer ce qui est affiché sur le graphique ci-dessus. Que peut-on conjecturer ?

Exercice 8
HEC 2017 ECS

On rappelle que si pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, en notant $\overline{Z_n} = \frac{Z_n}{n}$, la suite $(\overline{Z_n})_{n\geq 1}$ converge en probabilités vers p. Si f est une fonction continue, on a alors $(f(\overline{Z_n}))_{n\geq 1}$ qui converge vers $f(p)$. On considère le programme suivant :

```
def f(x):
   if x==0 :
       y=0
   else :
       y=-x*np.log(x)
   return y
p=0.4
n=100;   N=1000;   S=0
for k in range(1,N+1):
    S=S+f(rd.binomial(n,p)/n)
print(S/N)
```

Ce programme affiche la valeur approchée d'une certaine quantité, laquelle ?
Cette valeur approchée est le résultat de la mise en oeuvre de certaines méthodes, lesquelles ?

Exercice 9
Extrait Ecricome 2017
On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(k+1)^{k+1}}$$

On montre que la suite (S_n) converge vers une limite I, et que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad |I - S_n| \leq \frac{1}{e^{n+1}.(n+1)!}$$

Ecrire une fonction Python d'en-tête `def estimation(eps)` qui prend comme paramètre d'entrée un réel ϵ strictement positif, et qui produit en sortie une valeur approchée de I à ϵ près.

Exercice 10
Extrait Ecricome 2017
Pour tout entier n strictement positif, on considère l'expérience suivante : on dispose de n urnes initialement vides, numérotées de 0 à $n-1$ et on dispose d'un grand stock de boules que l'on dépose une à une dans ces urnes. Pour chaque boule, on choisit au hasard, de façon équiprobable, l'urne dans laquelle la boule est déposée.
On note X_n le rang du premier tirage pour lequel une des urnes contiendra deux boules. Compléter la fonction Python suivante pour qu'elle simule une réalisation de la variable aléatoire X_n.

```
def SimulX(n):
   urnes=np.zeros(n)
   X=1
   choix=int(np.floor(rd.random()*n)) #int pour convertir en nombre entier
   while .........:
        urnes[choix]=urnes[choix]+1
        choix=int(np.floor(rd.random()*n))
        X=........
   return X
```

Exercice 11
On définit deux suites (x_k) et (y_k) par : $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} x_{k+1} = 3x_k + 4y_k \\ y_{k+1} = 2x_k + 3y_k \end{cases}$$

Pour tout $k \geq 1$, on pose $r_k = \dfrac{x_k}{y_k}$ et on montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\quad |r_k - \sqrt{2}| < \frac{1}{2y_k^2}$$

Ecrire le code d'une fonction Python `approx2(n)` qui prend en entrée un entier n et qui renvoie un terme de la suite (r_k) qui soit une approximation de $\sqrt{2}$ à 10^{-n} près.

Exercice 12
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Le code Python ci-dessous simule une variable aléatoire T_N. Décrire une expérience aléatoire correspondant à cette simulation.

```
def T(N):
   X1,X2,X3=N+1,N+1,N+1
   t=0
   while X1*X2*X3>0:
      x=rd.random()
      if x<1/3:
          X1=X1-1
      elif x<2/3:
          X2=X2-1
      else:
          X3=X3-1
      t=t+1
   return t
```


Exercice 13
Soient b, c, d des constantes réelles et considérons l'équation $f(x) = 0$ avec $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Expliquer pourquoi il existe un entier naturel m tel que $f(m)f(-m) < 0$
2. Compléter la fonction ci-dessous pour qu'elle renvoie le plus petit entier naturel m vérifiant $f(m)f(-m) < 0$.

```
def trouver-chg-signe(b,c,d):
   def pol3(x):
      return x**3+b*x**2+c*x+d
   m=.......
   while .......:
      m=.......
  return m
```

3. On utilise une méthode de dichotomie pour trouver une solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $[-m, m]$: on considère les suites (a_n) et (b_n) définies comme suit : $a_0 = -m$, $b_0 = m$, et pour tout $n \geq 0$,

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} (a_n, c_n) \text{ si } f(c_n)f(a_n) \leq 0, \\ (c_n, b_n) \text{ sinon} \end{cases}$$

où l'on a posé $c_n = (a_n + b_n)/2$. Si on se donne un réel $\epsilon > 0$, on considèrera que la solution est atteinte à ϵ près si $|a_n - b_n| < \epsilon$, et dans ce cas on peut choisir c_n comme solution. Compléter la fonction suivante pour qu'elle renvoie une solution à ϵ près de l'équation $f(x) = 0$.
Cette fonction peut faire appel à la fonction `trouver-chg-signe`

```
def madichotomie(b,c,d,epsilon):
   def pol3(x):
      return x**3+b*x**2+c*x+d
   m=......
   a=......
   b=.....
   while (............;):
      c=(a+b)/2
      if (..........):
           ..........=c
      else:
           .........=c
      res=.....
  return res
```

Exercice 14
On considère une expérience consistant à lancer une pièce équilibrée n fois de manière consécutive. L'expérience en question est simulée par le programme Python ci-dessous pour la valeur $n = 10$ (et répétée ici 1000 fois).

```
Nexp=1000
n=10
u=rd.randint(1,3,[n,Nexp])
test=0
for k in range(0,Nexp):
    ok=1
    for i in range(1,n):
       if u[i-1,k]==1 and u[i,k]==1:
          ok=0
    test=test+ok
Pn=test/Nexp
print(Pn)
```

De quel événement E_n la variable P_n représente-t-elle la fréquence d'apparition ? Pour $n \geq 1$, on note p_n la probabilité de l'événement E_n. Pour $n \geq 3$, trouver une relation entre p_n, p_{n-1} et p_{n-2}. Montrer que (p_n) est décroissante et trouver sa limite quand n tend vers l'infini.