Florilège de questions de cours à HEC

Année 2008

- Enoncer le théorème du rang pour une application linéaire.
- Rappeler la définition de la loi uniforme sur un segment $[a, b]$ où a et b sont des réels tels que $a < b$. Eléments caractéristiques de cette loi.
- Rappeler la définition d'un vecteur propre, d'une valeur propre.
- Enoncer la loi faible des grands nombres.
- Définition et propriétés des projecteurs.
- Enoncer le théorème du rang.
- Donner la définition d'une fonction f convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ de longueur non nulle.
- Définition d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme f. Lien entre valeurs propres de f et racines d'un polynôme annulateur de f
- Définition et propriétés de l'espérance d'une variable aléatoire discrète.
- Produit de convolution.
- Définition des développements limités à l'ordre 1 et 2 d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$
- Donner la formule de la variance d'une somme finie de variables aléatoires prenant un nombre fini de valeurs.
- Définition et propriétés de la loi de Bernoulli et de la loi binômiale
- Donner la définition d'un estimateur.
- Définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre pour un endomorphisme.
- Rappeler la définition d'une matrice diagonalisable.
- Ecrire la formule de Taylor à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ evec reste intégral pour une fonction d'une variable réelle de classe C^∞
- Enoncer la formule des probabilités totales.

Année 2009 (ancien programme)

- Densité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes à densité.
- Définition et principales propriétés d'une fonction convexe sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- Définition et propriétés de la loi géométrique.
- définition de la convergence absolue d'une série numérique. Lien entre convergence et convergence absolue.

- Diagonalisabilité d'une matrice, d'un endomorphisme.
- Définition de la convergence en probabilité. Démontrer qu'une suite de variables aléatoires $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivant des lois de Poisson de paramères θ_n tels que $\lim_{n\to=\infty}\theta_n = 0$ converge en probabilité vers 0 .

Année 2010

- Donner une condition suffisante pour qu'une suite réelle décroissante soit convergente.
- Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes. Lois marginales, lois conditionnelles.
- Définition et propriétés d'une matrice inversible.
- Rappeler la définition d'une série convergente. Démontrer qu'une série à termes positifs est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Cette équivalence demeure-t-elle valable pour les séries à termes réels de signe quelconque ?
- Rappeler les formules de Taylor-Lagrange (inégalité) ainsi que leurs conditions de validité.
- Enoncer le théorème de réduction des matrices symétriques réelles.
- Définition et propriétés du produit de convolution de deux densités.
- Donner la définition d'un estimateur de λ.

Dans quel cas peut-on dire que cet estimateur est sans biais ?
- Enoncer le théorème central limite.
- Définition de la moyenne empirique et de la variance empirique d'une série statistique.
- Coefficient de corrélation linéaire ; définition et propriétés.

Année 2011 (ancien progamme)

- Enoncer le théorème de l'espérance totale.
- Rappeler la définition d'un espace vectoriel euclidien
- Estimateur sans biais et convergent d'un paramètre réel inconnu
- Rappeler la définition de la continuité en un point d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}(n \geq 2)$.
- Caractériser les isomorphismes d'espaces vectoriels de dimensions finies.
- Rappeler la définition de la fonction de répartition d'une variable aléatoire et en donner les principales propriétés.
- Rappeler la définition de la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires.
- Rappeler la définition du rang d'une matrice.

Une matrice carrée et sa transposée ont-elles nécessairement même rang ?

Année 2012

- Sommes de Riemann
- Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité
- Loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes, dans le cas où les deux variables aléatoires sont à valeurs dans $\mathbb{N}$ et dans le cas où elles possèdent une densité.
- Développement limité à l'ordre 1 en $a \in \mathbb{R}^n$ pour une fonction f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$
- Ordre de multiplité d'une racine d'un polynôme
- Rappeler comment l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet de définir à partir de $\overline{X_n}$ un intervalle de confiance au risque $\alpha \in]0,1[$ du paramètre p d'une loi de Bernoulli.
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs.

Rappeler la signification de $v_n = o\left(u_n\right)$

Montrer que, dans ce cas là, si la série de terme général u_n est convergente alors la série de terme général v_n l'est aussi et que l'on a $\sum_{k=n}^{+\infty} v_k = o\left(\sum_{k=n}^{+\infty} u_k\right)$

- Donner deux conditions suffisantes de diagonalisabilité d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dans les deux cas, préciser les propriétés des sous-espaces propres.
- Continuité d'une fonction réelle d'une variable réelle.
- Sous-espaces vectoriels supplémentaires
- Comparaison de séries à termes positifs
- Définition de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire $\rho_{X,Y}$ de deux variables aléatoires discrètes X et Y prenant chacune au moins deux valeurs avec une probabilité strictement positive. Indiquer dans quels cas $\rho_{X,Y}$ vaut 1 ou -1 .

Année 2013

- Enoncer le théorème de la bijection.
- Développement limité d'ordre 1 d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1
- Inégalité des accroissements finis pour une fonction réelle d'une variable réelle.
- Rappeler la définition d'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien. Que peut-on dire de sa matrice dans une base orthonormale ?
- Rappeler l'énoncé du théorème de la limite-centrée.
- Définition et propriétés des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien.
- définition de la limite d'une suite de nombres réels.
- Théorème de transfert
- Définition des valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme.
- Théorème de Pythagore.

— Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable.
— Donner deux conditions suffisantes et non nécessaires de diagonalisabilité d'une matrice.
— Définition de la convergence d'une série

Année 2014

— Défintion de la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires.
— Soit h une fonction numérique de classe C^1 sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ Qu'appelle-t-on point critique de h ?

Qu'appelle-t-on point critique pour l'optimisation de h sous contrainte d'égalités linéaires

$$\mathcal{C}\left\{\begin{array}{l} g_1(X) = b_1 \\ \vdots \\ g_p(X) = b_p \end{array}\right.$$

— Densité de la somme de deux varaibles aléatoires à densité indépendantes.
— Théorème de d'Alembert-Gauss et application à la factorisation dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbf{C}[X]$
— Que peut-on dire d'un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui admet plus de n racines ?
— Formule de l'espérance totale pour une variable aléatoire discrète X et un système complet d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
— Convergence des séries de Riemann et établir que $1 < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < 2$
— Définition et propriétés de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel dans un espace euclidien.
— Rappeler la définition du rang d'une matrice.

Quel est, en fonction des réels a, b, c et d le rang de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$?

— Enoncer une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité d'une matrice.
— Définition et propriétés d'un projecteur orthogonal.
— Définition et propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.

Année 2015

— Donner la définition du moment d'ordre k d'une variable aléatoire réelle.
— Propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
— Théorème du rang pour une application linéaire ; application à la caractérisation des isomorphismes.
— Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.
— Formule de Taylor à l'ordre r avec reste intégral pour une fonction de classe C^∞

- Rappeler la formule donnant la densité d'une somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes.
- Définition et propriétés d'un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien.
- Soit f un endomorphisme de E, x un vecteur propre de f associé à la valeur propre θ et P un polynôme à coefficients réels. Exprimer $P(f)(x)$ en fonction de P, θ et x. Montrer que toute valeur propre de f est racine de n'importe quel polynôme annulateur de f.
- Définition et propriétés de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
- Rappeler la définition d'une application surjective et d'une application injective.
- Théorême de transfert pour une variable aléatoire à densité.
- Enoncer le théorême de Pythagore.
- Définition d'une valeur propre et d'un vecteur propre d'un endomorphisme.

Année 2016

- Indiquer pour quels nombres réels x les séries $\sum_{n\geq 1} x^n$ et $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ sont convergentes et préciser alors leurs sommes respectives.
- E étant un espace vectoriel et f un endomorphisme de E. Rappeler la définition d'un sous-espace stable par f
- Enoncer le théorème du rang.
- Soit a un nombre réel, I un intervalle contenant a et non réduit à ce point et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Justifier que si f est continue sur I alors la fonction $F : x \longmapsto \int_a^x f(t)dt$ est définie et de classe C^1 sur I.
- Rappeler la formule donnant la densité d'une somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes et les conditions sous lesquelles cette formule est applicable.
- Soit n un entier supérieur ou égal à 2 .

Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ admet au moins un polynôme annulateur non nul.

- Soit f une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ qui est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$. Donner la forme du développement limité à l'ordre 1 de f en tout point et pour $(x, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, donner l'expression de la dérivée de l'apllication g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = f(x + th)$
- Changement de variable dans une intégrale impropre.
- Enoncer le théorème concernant la réduction des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien et démontrer la propriété sur les sous-espaces propres d'un tel endomorphisme.
- Enoncer un théorème permettant de déterminer la nature d'une série numérique à l'aide d'un équivalent de son terme général.
- Pour tout réel $\nu > 0$, on note S_ν une variable aléatoire suivant la loi $\gamma(\nu)$

a. Donner l'expression d'une densité de S_ν

b. Dans le cas où $\nu > 2$ donner une représentation graphique de l'unqiue densité de S_ν qui est continue sur $\mathbb{R}$.

— Ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.

— a. Enoncer le théorème de la bijection.

b. Donner une condition suffisante pour qu'une fonction de répartition soit bijective.

Année 2017

- — Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice soit diagonalisable.
- — Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.
- — Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires.
- — Donner la définition de la convergence en loi et de la convergence en probabilité d'une suite de variables aléatoires.
- — Enoncer la formule du rang pour une application linéaire entre deux espaces vectoriels (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbf{C}$) de dimension finie.
- — Enoncer le théorème de stabilité de la loi de Poisson pour la somme.
- — Formule des probabilités totales.
- — Polynômes annulateurs d'endomorphismes ; définition et propriétés.
- — Stabilité de la loi γ pour la somme.
- — Définition et propriétés d'un produit scalaire.
- — Espérance du produit de variables aléatoires indépendantes.
- — Enoncer des conditions suffisantes de diagonalisabilité d'une matrice carrée réelle.

Année 2018

- — Inégalité de Markov.
- — Formule de Taylor avec reste intégral et cas particulier d'une fonction polynômiale.
- — Donner la définition d'une forme linéaire. Quel lien existe-t-il entre formes linéaires et hyperplans ?
- — Donner la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$ lorsque E est un espace de dimension finie et en déduire la dimension de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
- — Définition et propriétés des lois γ.
- — Egalité et inégalités des accroissements finis.
- — Enoncer le théorème de transfert pour les variables aléatoires discrètes.
- — Si H est un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien F, rappeler la définition de la projection orthogonale p_H sur H et, pour tout $x \in F$, donner la caractérisation de $p_H(x)$ par minimisation d'une norme.
- — Rappeler la définition de la partie entière $\lfloor x \rfloor$ d'un nombre réel x. Donner l'allure du graphe de la fonction partie entière et en indiquer les principales propriétés.
- — Rappeler la définition d'une application bijective.
- — Soit f une fonction de classe C^2 sur un ouvert Ω non vide de $\mathbb{R}^n$.

Donner la définition des dérivées directionnelles, premières et secondes, de f en un point x de Ω dans la direction $h = (h_1, \ldots, h_n)$.

Exprimer leurs valeurs en fonction du gradient $\nabla(f)(x)$ et de la matrice hessiennes $\nabla^2(f)(x)$ de la fonction f au point x.

— Quand dit-on qu'une fonctions f est négligeable par rapport à une fonction g au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$?

Année 2019

— Loi d'un couple de variables aléatoires discrètes, caractérisation de leur indépendance.
— Minorant et minimum d'une partie non vide de $\mathbb{R}$.
— Ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ou $\mathbf{C}[X]$.
— Définition et propriétés des fonctions continues de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.
— $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ étant un espace probabilisé, rappeler la définition d'une tribu de parties de Ω. Donner trois exemples de tribus de parties de $\mathbb{N}$.
— Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle à densité. Quelle propriété spécifique la fonction de répartition F possède-t-elle lorsque la variable aléatoire associée à une densité paire ? Que dire alors du graphe de F ?
— Définition et propriétés de la fonction Γ.
— Définition et caractérisation des projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien.
— Rappeler la définition d'un estimateur convergent d'un paramètre θ.
— Enoncer le théorême de réduction des endomorphismes symétriques d'un espace euclidien.
— Enoncer le théorême du rang.
— Sous-espaces supplémentaires : définition et caractérisations.

Année 2021

— Inégalité de Markov
— Définition de l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme
— Donner une condition suffisante pour qu'une fonction de plusieurs variables admette des extrema globaux sur un ensemble donné.
— Matrice hessienne en un point x.
— Enoncer le théorème central limite.
— Rappeler la définition d'un produit scalaire sur un espace vectoriel réel E.
— Réduction des matrices symétriques réelles.
— Enoncer le théorème de Pythagore.
— Somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes.
— Lois γ : densité et stabilité par une opération à expliciter.
— Enoncer le théorème d'intégration par parties.

— Formule des probabilités totales.
— Rappeler la définition et les propriétés de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
— Enoncer le théorème de Rolle.
— Somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes.
— Définition de la convergence absolue d'une série. Lien avec la convergence.
— Enoncer l'inégalité des accroissements finis.
— Formule du produit matriciel.
— Que peut-on dire des sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien ?

Année 2022

— Enoncer l'inégalité de Markov
— Propriétés de la trace
— Inégalité de Bienaymé-Tchebychev (2 fois !)
— Convergence en probabilité
— Convergence en loi d'une suite de variables aléatoires. Exemple.
— Théorème de la limite monotone dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
— $\cos(a+b)$, $\cos(a-b)$.
— Caractérisation des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I
— Développement de $||a+b||^2$ lorsque a et b sont deux vecteurs d'un espace euclidien $(E, <.,.>)$.
— Définition d'un système complet d'événements
— Définition d'une fonction convexe.
— Inégalité de Cauchy-Schwarz
— Projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel, définition, caractérisation par la distance.
— Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation pour un endomorphisme.
— Théorème de transfert pour les variables aléatoires discrètes infinies.
— Définition d'un projecteur, propriétés.

Année 2023

— Condition suffisante d'extremum global pour une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur une partie de $\mathbb{R}^n$.
— Définition de la divergence d'une suite vers $+\infty$.
— Somme des n premiers entiers.
— Théorème de limite monotone en probabilités.
— Définition de la convergence en probabilités. Enoncer la loi faible des grands nombres.
— Réduction des endomorphismes symétriques (2 fois)
— Dérivée et extrema des fonctions d'une variable réelle.

— Calcul des fonctions de répartition et densité de Z^2, où Z est une variable aléatoire à densité.
— Propriété des fonctions continues sur un intervalle.
— Produit de convolution.
— Théorème Central Limite.
— Formule de l'espérance totale.
— Théorème du rang
— Définition d'un estimateur
— Enoncer le théorème de transfert
— Définition d'une variable aléatoire à densité.
— Condition nécessaire d'existence d'un extremum pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ sous contrainte d'égalités linéaires.
— Convergence en probabilité et convergence en loi