

Quelques exemples et contre-exemples qui peuvent servir :

En analyse :

- Une suite bornée qui n'admet pas de limite : $u_n = (-1)^n$.
- Une suite convergente qui n'est pas monotone : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$.
- $u_n \sim v_n$ mais e^{u_n} pas équivalente à e^{v_n} : $u_n = n^2$ et $v_n = n^2 + n$.
- Une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et pas dérivable en un point :
la fonction **valeur absolue** $f : x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais pas dérivable en 0 (car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$ alors que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1$).
- Une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et pas dérivable en 0 :
la fonction **racine carrée** $g : x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 0 mais pas dérivable en 0 puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = +\infty$ (tangente verticale en 0 à la courbe de g).
- Une fonction paire et périodique : la fonction cos, paire et périodique de période 2π .
- Une fonction impaire et périodique : la fonction sin, impaire et périodique de période 2π .
- Une fonction périodique de période 1 : la fonction $x \mapsto \cos(2\pi.x)$ ou la fonction $x \mapsto \sin(2\pi.x)$. Ces fonctions sont de plus $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (donc continues dérivables etc...).
- Une fonction périodique de période $T > 0$: $x \mapsto \cos(\frac{2\pi}{T}.x)$ ou $x \mapsto \sin(\frac{2\pi}{T}.x)$.
- Une autre fonction périodique de période 1 :
la fonction **partie décimale** $x \mapsto x - [x]$. Cette fonction n'est pas continue en n , pour tout $n \in \mathbb{Z}$!
- Une fonction croissante mais pas strictement croissante : la fonction **partie entière**.
Il s'agit aussi d'un exemple de fonction non continue en une infinité (dénombrable) de points.
- Une fonction qui vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq f(x+1)$ mais f n'est pas croissante :
prendre une fonction 1-périodique ! Par exemple $x \mapsto \sin(2\pi.x)$ vérifie cette relation mais n'est pas du tout monotone.
- Une fonction convexe : la fonction carré, la fonction exp.
- Une fonction concave : la fonction ln.
- Une fonction telle que $f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum de f : la fonction cube $x \mapsto x^3$.
- Une fonction telle que $f''(0) = 0$ mais 0 n'est pas un point d'inflexion de f : la fonction $x \mapsto x^4$.

En algèbre :

- **Les matrices nilpotentes :**

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = 0$: A est d'indice de nilpotence 2,

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = 0$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $B^2 = A$, puis $B^3 = 0$: B est d'indice de nilpotence 3.

Plus généralement si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (la

"sur-diagonale" de 1 se décale d'un cran vers la droite à chaque fois);

$A^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^n = 0$ (A est d'indice de nilpotence n).

- **Une matrice non diagonalisable :** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- **Une matrice non diagonalisable mais inversible :** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- **Une famille de trois vecteurs deux à deux non colinéaires qui est liée :** (u, v, w) où $u = (1, 0)$, $v = (0, 1)$, $w = (1, 1)$.
- **Créer une matrice symétrique ou antisymétrique :** si A est une matrice carrée, la matrice $B = A + {}^t A$ est symétrique, la matrice $C = A - {}^t A$ est antisymétrique et on a la décomposition $A = \frac{1}{2}(A + {}^t A) + \frac{1}{2}(A - {}^t A)$. Idem pour les fonctions paires/impaires !

En probabilités :

- **Une variable aléatoire discrète qui n'admet pas d'espérance :** X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ avec pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}$. Alors par télescopage $\sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) = 1$ donc on définit bien une loi mais la série $\sum_k k \cdot P(X = k)$ diverge.
- **Une variable aléatoire à densité qui n'admet pas d'espérance :** la loi de Cauchy : X de densité : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}$.
- **Une variable aléatoire à densité qui n'admet pas d'espérance :** penser à une intégrale de Riemann : X de densité

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- **Une variable aléatoire à densité qui admet une espérance mais pas de variance :** penser à une intégrale de Riemann : X de densité

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{1}{2x^3} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- On peut construire facilement sur le même modèle une variable à densité qui admet un moment d'ordre p mais pas de moment d'ordre $p+1$.