Planche Oral Analyse 1 - ESCP 2024 - EX. 1.2 (format 2025)

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt$ converge pour tout $x > 0$.

   On pose alors pour tout $x > 0$ $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt$.

2. (a) Montrer qu'il existe un réel a tel que

   $$\lim_{x \to 0^+} (f(x) - f(1) + \ln(x)) = a.$$

   (on remarquera que $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$).

   (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

3. On admet que

   $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

   Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

Corrigé Oral Analyse 1 - ESCP 2024 - EX. 1.2 (format 2025)

1. Soit $x > 0$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ est continue sur $]x;+\infty[$, donc l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt$ est impropre en $+\infty$ uniquement. De plus, pour tout $t > x$, $|\dfrac{\sin(t)}{t^2}| \leq \dfrac{1}{t^2}$. Comme $\int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge (Riemann, $\alpha = 2 > 1$), l'intégrale que nous étudions est absolument convergente donc convergente.
   On pose alors pour tout $x > 0$ $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt$.

2. (a) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} f(x) - f(1) + \ln(x) &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt - \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt + \int_1^x \frac{dt}{t} \\ &= -\int_1^x \frac{\sin(t)}{t^2}dt + \int_1^x \frac{dt}{t} \quad \text{(Chasles)} \\ &= \int_1^x \frac{t-\sin(t)}{t^2}dt \\ &= \int_x^1 \frac{\sin(t)-t}{t^2}dt \end{aligned}$$

   Or $\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$, donc $\dfrac{\sin(t)-t}{t^2} = -\frac{t}{6} + o(t)$ donc $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sin(t)-t}{t^2} = 0$. L'intégrale $\int_0^1 \dfrac{t-\sin(t)}{t^2}dt$ est donc faussement impropre en 0. Par conséquent en posant a le réel $a = \int_0^1 \dfrac{t-\sin(t)}{t^2}dt$ on trouve bien que

$$\lim_{x\to 0^+} (f(x) - f(1) + \ln(x)) = a.$$

   (b) Tout d'abord, on peut remarquer que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt + \int_x^1 \frac{\sin(t)}{t^2}dt = K + G(x)$$

   où K est une constante et G est une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction continue $g : t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$. Par conséquent la fonction f est continue sur $]0;+\infty[$ (et même dérivable). L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est donc impropre a priori en 0 et en $+\infty$. En 0, on a $f(x) = f(1) - \ln(x) + a + o(1)$. On en déduit aisément que $f(x) \sim_{x\to 0} -\ln(x)$. Comme $\int_0^1 -\ln(x)dx$ converge (classique à savoir redémontrer), par critère d'équivalence (fonctions à termes positifs), l'intégrale $\int_0^1 f(x)dx$ converge. Il reste à montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ en $+\infty$.
   Soit $x > 0$, on effectue une intégration par parties avec $A > 0$:

$$\int_x^A \frac{\sin(t)}{t^2}dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t^2}\right]_x^A - 2\int_x^A \frac{\cos(t)}{t^3}dt = \frac{\cos(A)}{A^2} + \frac{\cos(x)}{x^2} - 2\int_x^A \frac{\cos(t)}{t^3}dt.$$

On fait tendre A vers $+\infty$ d'où

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2} - 2\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^3} dt.$$

D'une part, $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} dx$ converge (car converge absolument). D'autre part,

$$x^{3/2}. \int_x^{+\infty} |\frac{\cos(t)}{t^3}| dt \leq x^{3/2}. \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{t^{3/2}}{t^3} dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt$$

et cette dernière intégrale converge.
Au final, $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ converge comme somme d'intégrales convergentes.

Bilan : $\boxed{\int_0^{+\infty} f(x)dx \text{ converge}}$

3. On admet que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$.
Soit ϵ et A deux réels avec $0 < \epsilon < A$. Par IPP,

$$\int_\epsilon^A f(x)dx = [x.f(x)]_\epsilon^A - \int_\epsilon^A x.f'(x)dx = A.f(A) - \epsilon.f(\epsilon) - \int_\epsilon^A x.(-\frac{\sin(x)}{x^2})dx$$

Comme f possède une limite finie en 0, $\lim_{\epsilon\to 0} \epsilon.f(\epsilon) = 0$. De plus, on a aussi $A.f(A) = A.(\frac{\cos(A)}{A^2} - 2\int_A^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^3} dt$ qui tend vers 0 quand A tend vers $+\infty$ (cf au-dessus). D'où enfin par passage à la limite quand $\epsilon \to 0$ et $A \to \infty$,

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

Question sans préparation (ESCP 2024)

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes et de même loi. On pose $p = P(X_1 = 1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit une variable aléatoire Y_n par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y_n(\omega) = \text{card}\{k \in [[1, n]] |\ X_k(\omega) = 1\},$$

où l'on a noté card$E$ le cardinal de l'ensemble (fini) E.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y_n.

2. Soit $\lambda > 0$. Soit N une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi de Poisson de paramètre λ et qui est indépendante des variables X_n. On définit une variable aléatoire Z par :

   $$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = Y_{N(\omega)}(\omega).$$

   Déterminer la loi de Z

Solution QSP

1. Notons pour tout $k \in [[1, n]]$, $1_{[X_k=1}$ la variable indicatrice de l'événement $[X_k = 1]$. Alors
$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} 1_{[X_k=1]}$$
Chacune de ces variables indicatrice suit la loi de Bernoulli de paramètre $p = P(X_k = 1)$. Comme les variables X_k sont indépendantes, il en est de même pour les variables $1_{[X_k=1}$. On en déduit que Y_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

2. Tout d'abord, $Z(\Omega) = \mathbb{N}$. Ensuite, d'après la FPT dans le SCE associé à N : pour tout $k \in \mathbb{N}$
$$\begin{aligned}
P(Z = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P([N = n] \cap [Z = k]) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} P([N = n] \cap [Y_n = k]) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} P(N = n).P(Y_n = k) \quad \text{par indépendance des variables N et } Y_n \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}.e^{-\lambda}.\binom{n}{k}.p^k.(1-p)^{n-k} \quad \text{la suite est un calcul bien classique} \\
&= e^{-\lambda}.p^k.\frac{1}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{.}\frac{1}{(n-k)!}(1-p)^{n-k} \\
&= e^{-\lambda}.p^k.\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\lambda^(k+i)}{.}\frac{1}{i!}(1-p)^{i} \\
&= e^{-\lambda}.p^k.\frac{1}{k!}.\lambda^k.e^{\lambda.(1-p)} \\
&= \frac{(\lambda.p)^k}{k!}.e^{-\lambda.p}
\end{aligned}$$
donc Z suit la loi $\mathcal{P}(\lambda.p)$.