

## Planche Oral Algèbre 2 - HEC 2019 - S.316

### Exercice principal

On considère un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ; on note  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients réels et  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  (resp.  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ ) le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  constitué des matrices symétriques (resp. des matrices antisymétriques).

Le but de l'exercice est d'étudier l'équation  $(E)$  d'inconnue  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  :

$${}^tM + M^2 = I_n$$

1. Question de cours : sous-espaces supplémentaires : définition et caractérisations.
2. Montrer que tout solution de  $(E)$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  possède un polynôme annulateur de degré 4. Qu'en déduit-on pour les valeurs propres d'une solution de  $(E)$  ?
3. Soit  $M$  une solution de  $(E)$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
  - (a) Montrer que  $M$  et  ${}^tM$  commutent.
  - (b) Justifier l'existence et l'unicité de  $(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$  tel que  $M = S + A$ .
  - (c) Avec les notations précédentes, montrer que :

$$\begin{cases} AS = SA \\ S + S^2 + A^2 = I_n \\ -A + 2AS = 0 \end{cases}$$

- (d) Justifier l'existence d'une matrice inversible  $P$  telle que  $D = P^{-1}SP$  soit diagonale et  $A' = P^{-1}AP$  soit antisymétrique.
  - (e) Indiquer les relations entre  $D$  et  $A'$  résultant de c).
  - (f) En déduire que  $A' = 0$  et préciser les valeurs possibles pour les coefficients diagonaux de  $D$ .
4. Déterminer la forme des solutions de  $(E)$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

### Question sans préparation

Soit  $X$  une variable aléatoire à densité qui est à valeurs dans  $]0; +\infty[$  et telle que  $X$  et  $\frac{1}{X}$  ont même loi.

1. Quelle est la valeur de  $P(X \leq 1)$  ?
2. On suppose que  $X$  admet une densité  $f$  qui est continue sur  $]0; +\infty[$  et qui est constante sur  $]0, 1]$ .  
Déterminer la valeur de  $f(x)$  pour tout  $x > 0$  et vérifier la cohérence du résultat obtenu.