Corrigé Oral Algèbre- HEC 2019 - S.316

Exercice principal

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$; on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$) le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constitué des matrices symétriques (resp. des matrices antisymétriques).

Le but de l'exercice est d'étudier l'équation (E) d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$^tM + M^2 = I_n$$

1. F et G sont supplémentaires dans E ssi $E = F \oplus G \Leftrightarrow E = F + G$ et $F \cap G = \{0\}$.
   Caractérisations : ssi tout vecteur de E s'écrit de facon unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G, ssi $F \cap G = \{0\}$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$, ssi $F + G = E$ et $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$, critère de concaténation de bases.

2. Soit M une solution de l'équation (E). Comme $^{t\,t}M = M$, on obtient :

   $$M = {}^t\,(I_n - M^2) = I_n - ({}^tM)^2 = I_n - (I_n - M^2)^2 = 2M^2 - M^4$$

   donc le polynôme $P = X^4 - 2X^2 + X$ est annulateur de M. On remarque que :

   $$P = X(X-1)(X^2 + X - 1)$$

   et de plus les racines du polynôme $X^2 + X - 1$ sont $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
   Comme $Sp(M) \subset \{\text{racines de } \ P\}$, on peut dire que

   $$Sp(M) \subset \{0, 1, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\}$$

3. Soit M une solution de (E) dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (a)
   $$M.{}^tM = M.(I_n - M^2) = M - M^3 = (I_n - M^2).M = {}^tM.M$$
   donc M et ^tM commutent.

   (b) Justifions l'existence et l'unicité de $(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = S + A$.
   Classique ! Par analyse et synthèse.
   Analyse : supposons que $M = S + A$ où $(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Alors $^tM = S - A$, d'où $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$ et $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$. D'où l'unicité.
   Synthèse : les matrices S et A trouvées ci-dessus sont bien symétrique et antisymétrique, et vérifient $M = S + A$, d'où l'existence.
   Bilan : il y a bien existence et l'unicité de $(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = S + A$

   (c) Comme M et ^tM commutent, et $S = \frac{1}{2}(M + {}^tM)$, $A = \frac{1}{2}(M - {}^tM)$, il est évident que S et A commutent : $AS = SA$.

   En partant de la relation $^tM = I_n - M^2$, on obtient $S - A = I_n - S^2 - 2SA - A^2$. Or, on montre facilement que $I_n - S^2 - A^2$ est symétrique et que $-2SA$ est antisymétrique. Par unicité de l'écriture comme somme d'une matrice symétrique et d'une antisymétrique, on a alors $S = I_n - S^2 - A^2$ et $-A = -2SA$ d'où $S + S^2 + A^2 = I_n$ et $-A + 2AS = 0$.

   Bilan :

   $$\boxed{\begin{cases} AS = SA \\ S + S^2 + A^2 = I_n \\ -A + 2AS = 0 \end{cases}}$$

   (d) La matrice S est symétrique donc orthodiagonalisable : il existe une matrice orthogonale P telle que $D = P^{-1}SP = {}^tPSP$ soit diagonale. En posant $A' = P^{-1}AP$, on a alors

   $$^tA' = {}^t({}^tPAP) = {}^tP\,{}^tAP = -{}^tPAP = -A'$$

   donc A' est antisymétrique.

(e) En traduisant les relations de c), on obtient facilement :

$$\begin{cases} A'D = DA' \\ D + D^2 + A'^2 = I_n \\ -A' + 2A'D = 0 \end{cases}$$

(f) Notons $A' = (a'_{i,j})_{(i,j)\in[[1,n]]^2}$ et $D = Diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$. Alors

$$A'D = DA' \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [[1,n]]^2,\ (\lambda_i - \lambda_j).a'_{i,j} = 0$$

$$-A' + 2A'D = 0 \Leftrightarrow \forall (i,j) \in [[1,n]]^2,\ a'_{i,j}(1 - 2\lambda_j) = 0$$

Et sachant que $D + D^2 + A'^2 = I_n$, en égalant les coeff. diagonaux :

$$\forall i \in [[1,n]],\ \lambda_i + \lambda_i^2 + \sum_{k=1}^{n} a'^2_{i,k} = 1$$

Supposons que l'un des coeff. $a'_{i,j}$ est non nul. Alors $\lambda_i = \lambda_j = \frac{1}{2}$ et en remplacant dans la troisième relation $\frac{3}{4} - \sum_{k=1}^{n} a'^2_{i,k} = 1$: absurde !
Donc tous les coeff. $a'_{i,j}$ sont nuls et par conséquent $A' = 0$.

Lourdingue !!

On a donc $D + D^2 = I_n$: les coeff. diagonaux de D sont racines du polynôme $P = X^2 + X - 1$, donc prennent comme valeurs $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

4. Finalement, **si** M est solution de (E) alors M est symétrique et $M = P.D.{}^tP$ où P est orthogonale et $D = Diag(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \cdots, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \cdots)$.
Réciproquement, si $M = P.D.{}^tP$ où P est orthogonale et $D = Diag(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \cdots, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \cdots)$. alors M est symétrique et $M + M^2 - I_n = 0$ donc M est bien solution de (E).

Question sans préparation

Soit X une variable aléatoire à densité qui est à valeurs dans $]0;+\infty[$ et telle que X et $\frac{1}{X}$ ont même loi.

1. $P(X \leq 1) = P(\frac{1}{X} \leq 1) = P(X \geq 1)$. Comme $P(X \leq 1) + P(X \geq 1) = 1$ (var. à densité), finalement $P(X \leq 1) = \frac{1}{2}$.

2. On suppose que X admet une densité f qui est continue sur $]0;+\infty[$ et qui est constante sur $]0,1]$. Notons $a > 0$ tel que pour tout $x \in]0,1]$, $f(x) = a$.
   Alors $P(X \leq 1) = a$ d'où $a = \frac{1}{2}$. De plus, si $x > 1$,

   $$P(X \leq x) = 1 - P(X \geq x) = 1 - P(\frac{1}{X} \leq \frac{1}{x}) = 1 - P(X \leq \frac{1}{x}) = 1 - \frac{1}{2x}$$

   d'où en dérivant : si $x > 1$, $f(x) = \frac{1}{2x^2}$.

   Bilan :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2} \text{ si } 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{2x^2} \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

   Vérification :

   $$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^2} dx = \lim_{A \to +\infty} [-\frac{1}{2x}]_1^1 = \frac{1}{2} : OK$$

   Déterminer la valeur de $f(x)$ pour tout $x > 0$ et vérifier la cohérence du résultat obtenu.