CONCOURS APRÈS CLASSES PRÉPARATOIRES

ANNALES DES ÉPREUVES ORALES DE MATHÉMATIQUES

2024

une école de la

AVANT-PROPOS

Ces annales corrigées de mathématiques des épreuves orales du concours ESCP regroupent une partie des exercices posés en 2024 ainsi que leur corrigé dans les options scientifique et littéraire B/L.

Ils sont accompagnés d'une réecriture des énoncés dans la forme des sujets qui seront proposés à partir du concours 2025.

Jusqu'ici, chaque candidat préparait pendant trente minutes un sujet principal, puis devait exposer en une vingtaine de minutes son travail préparé en salle ; ensuite il était interrogé directement au tableau, pendant une dizaine de minutes, sur une courte question — dont on trouvera, dans cet ouvrage, un échantillon.

À compter du concours 2025, la demi-heure de préparation est supprimée et chaque candidat sera interrogé sur le premier exercice directement au tableau (donc *sans préparation*) sur un premier sujet pendant une vingtaine de minutes. Une question courte en dix minutes suivra, comme dans l'ancien format.

Cet ouvrage est destiné à aider les candidats pour leur préparation à l'épreuve orale de mathématiques de l'ESCP, voire aux différentes épreuves écrites, et à fournir des ressources aux enseignants des classes préparatoires économiques et commerciales.

L'attention des candidats et des professeurs qui les préparent est néanmoins attirée sur le fait que les corrigés proposés sont destinés aux interrogateurs. Ainsi certaines formulations abrégées des réponses ne sont pas exactement celles qui sont attendues des candidats (qui doivent être plus complètes ou plus conformes aux formulations précises du programme officiel de leur filière). De plus, certains exercices publiés dans ces annales sont assez longs : ce sont des sujets d'étude et le jury n'en attend pas nécessairement de la part des candidats une résolution complète.

Les énoncés et corrigés des exercices ont été regroupés en cinq rubriques : analyse, algèbre, probabilités, sujets de l'option littéraire B/L et questions courtes.

Ces annales n'auraient pu voir le jour sans la fidèle collaboration et l'investissement dans la conception des exercices, de tous les examinateurs de l'oral de mathématiques de l'ESCP. Nous les en remercions.

Léon Laulusa, Directeur Général ESCP.

Muriel Granjean, Responsable des Admissions ESCP.

Frédéric Cadet, Henri Lemberg et Magali Rocher, Responsables des épreuves orales
de mathématiques du concours ESCP.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE

1

ANALYSE

Sujet 1.1

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positifs.
   (a) Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge dans le cas où $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ à partir d'un certain rang, c'est-à-dire que :
   $$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant N, \ \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1.$$
   (b) On suppose maintenant que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ existe et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$. Étudier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.
   (On pourra montrer qu'il existe N, ℓ et $C > 0$ adéquatement choisis tels que : $\forall n \geqslant N, \ u_n \leqslant C\,\ell^n$).

Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Pour la suite de l'énoncé, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 > 0 \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}.$$

2. (a) Vérifier que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puis étudier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ lorsque $b \leqslant a$.
   (b) On suppose que $b = a+1$. Que peut-on en déduire sur la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
   $$v_n = (n+a)u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
   En déduire la nature de la série $\sum_n u_n$.
   (c) Étudier la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ lorsque $a < b \leqslant a+1$.
3. (a) Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (b-a-1) \quad \left(\sum_{k=0}^{n+1} u_k\right) = (b-1)u_0 - (n+a+1)u_{n+1}.$$
   (b) Montrer que pour $a+1 < b$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente.
   (c) Calculer $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ lorsque $a+1 < b$.

Sujet 1.1 au format de l'année 2025

Soient $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}.$$

1. (a) Vérifier que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la monotonie de la suite (u_n).

   (b) En déduire la nature de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ lorsque $b \leqslant a$.

2. (a) On suppose que $b = a+1$. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n} u_n$.

   (b) Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ lorsque $a < b \leqslant a+1$ (on pourra utiliser $v_n = (n+a)u_n$).

3. On suppose que $a+1 < b$.

   (a) Exprimer $\sum\limits_{k=0}^{n+1} u_k$ en fonction de a, b, u_0 et u_{n+1}.

   (b) Montrer que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente et déterminer sa somme $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Solution du sujet 1.1

1. (a) Si la série était convergente u_n tendrait vers 0 lorsque $n \to +\infty$.
   Or, par récurrence immédiate on a $u_n \geqslant u_N > 0$ pour tout $n \geqslant N$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut donc pas converger vers 0. La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est donc divergente.

   (b) On note $\tilde{\ell}$ le réel positif : $\tilde{\ell} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}/u_n$. On pose $\ell = (1+\tilde{\ell})/2$. Comme $\tilde{\ell} < 1$, on a $0 \leqslant \tilde{\ell} < \ell < 1$. Par définition de la limite, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $0 \leqslant u_{n+1}/u_n \leqslant \ell$ pour $n \geqslant N$.
   Il vient alors par récurrence immédiate $u_{N+n} \leqslant \ell^n\, u_N = \ell^{n+N}\, \ell^{-N} u_N$ pour $n \geqslant 0$.
   On pose $C = |\ell^{-N} u_N|$; alors pour tout $m \geqslant N$, $|u_m| \leqslant C\ell^m$.
   Donc, par comparaison avec une série géométrique convergente, la série $\sum u_m$ est absolument convergente, donc convergente.

2. (a) On vérifie que $u_n > 0$ par récurrence immédiate en utilisant le fait que $u_0 > 0$ et $a, b > 0$.
   Si $b \leqslant a$, on a $n + a \geqslant n + b$ pour $n \geqslant 0$ et donc $u_{n+1}/u_n = (n+a)/(n+b) \geqslant 1$ pour $n \geqslant 0$.
   La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est donc divergente d'après la question 1)a).

   (b) Si $b = a+1$, il vient $v_{n+1} = (n+a+1)u_{n+1} = (n+b)u_{n+1} = (n+a)u_n = v_n$ pour $n \geqslant 0$.
   La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante et vaut $v_0 = a\,u_0$; ainsi $u_n = \dfrac{a\,u_0}{n+a}$.
   Donc , par comparaison avec la série harmonique, la série $\sum u_n$ diverge.

   (c) Pour $a+1 > b$ et $b > 0$, on a $(n+a)/(n+b) \geqslant (n+a)/(n+a+1)$ pour tout $n \geqslant 0$.
   On montre alors par récurrence immédiate : $u_n \geqslant a\,u_0/(n+a)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   Ainsi par règle de comparaison de séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est divergente.

3. (a) Facilement par récurrence ; ou sinon par télescopage.
   On a $u_{k+1}\,(k+b) = u_k\,(k+a)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Cette relation peut se réécrire sous la forme :

$$u_{k+1}\,(k+1+a+b-a-1) = u_k\,(k+a) \Leftrightarrow (b-a-1)u_{k+1} = u_k\,(k+a) - u_{k+1}(k+1+a),\ \forall k \in \mathbb{N}$$

   En sommant, et par télescopage, il vient

$$(b-a-1)\sum_{k=0}^{n} u_{k+1} = u_0\,a - u_{n+1}(n+1+a) \Leftrightarrow (b-a-1)\sum_{k=0}^{n+1} u_k = (b-a-1)u_0 + u_0\,a - u_{n+1}(n+1+a)$$

   En simplifiant le terme de droite, on conclut à la relation demandée. (En particulier, celle-ci implique que la suite $(v_n)_{n\mathbb{N}}$ de la question 2)b) est constante pour $b = a+1$.)

   (b) Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et que $b > (a+1)$, on déduit de la question 3)a) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} u_k \leqslant [(b-1)/(b-a-1)]u_0$. Les sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ sont donc majorées par $(b-1)/(b-a-1)]u_0$. La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est à termes positifs, elle est donc convergente.

   (c) De 3)a et 3)b, il découle que $(n+a+1)u_{n+1}$ admet une limite $\ell \geqslant 0$ lorsque $n \to +\infty$.
   Supposons par l'absurde $\ell > 0$. On a alors $u_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell/(n+a+1)$, *i.e.* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell/(n+a+1)$.
   Par règle de comparaison de séries à termes positifs, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ serait alors divergente.
   C'est absurde. On a donc $\ell = 0$.
   En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans la relation de la question 3)a),
   on conclut que $S = \dfrac{(b-1)u_0}{b-a-1}$.

Sujet 1.2

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ converge pour tout $x > 0$.

On pose alors pour tout $x > 0$ $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.
3. (a) Montrer qu'il existe un réel a tel que

$$\lim_{x \to 0^+} (f(x) - f(1) + \ln(x)) = a.$$

   (on pourra exprimer $\ln(x)$ sous forme d'une intégrale).

   (b) En déduire un équivalent de f au voisinage de 0.
4. Montrer que

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2} - 2 \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^3} dt.$$

5. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) dx$ est convergente.
6. On admet que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

   Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

Sujet 1.2 au format de l'année 2025

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ converge pour tout $x > 0$.

On pose alors pour tout $x > 0$ $f(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.

2. (a) Montrer qu'il existe un réel a tel que

$$\lim_{x \to 0^+} (f(x) - f(1) + \ln(x)) = a.$$

(on remarquera que $\ln x = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$).

   (b) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

3. On admet que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

Solution du sujet 1.2

1. Soit $x > 0$, la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ est définie, continue sur $]x, +\infty[$. De plus on a $\forall x > 0,\ |\dfrac{\sin(t)}{t^2}| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$.
   On en déduit l'absolue convergence de l'intégrale généralisée $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$ pour $x > 0$. Ainsi f est bien définie sur $]0, +\infty[$.
2. De plus f dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0,\ f'(x) = -\dfrac{\sin(x)}{x^2}$. (on utilise le théorème fondamental du calcul intégral en écrivant $f(x) = \displaystyle\int_x^1 g(t)dt + \int_1^{+\infty} g(t)dt$).
   On en déduit que est f' est de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$ donc f est C^∞ sur $]0, +\infty[$.
3. (a) On a
   $$\forall x > 0,\ \ f(x) - f(1) + \ln(x) = \int_x^1 \frac{\sin(t)}{t^2} - \frac{1}{t} dt = \int_x^1 \frac{\sin(t) - t}{t^2} dt$$
   Or un équivalent en 0 de $\dfrac{\sin(t) - t}{t^2}$ est $\dfrac{-t^3}{6\,t^2} = -\dfrac{t}{6}$, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t) - t}{t^2} dt$ est faussement généralisée. On pose $a = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t) - t}{t^2} dt$. On obtient ainsi $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x) - f(1) + \ln(x) = a$.

   (b) On en déduit que $f(x)$ est équivalent à $-\ln(x)$ en 0.
4. Soit $x > 0$, on effectue une intégration par parties avec $A > 0$:
   $$\int_x^A \frac{\sin(t)}{t^2} dt = \left[-\frac{\cos(t)}{t^2}\right]_x^A - 2\int_x^A \frac{\cos(t)}{t^3} dt = \frac{\cos(A)}{A^2} + \frac{\cos(x)}{x^2} - 2\int_x^A \frac{\cos(t)}{t^3} dt.$$
   On fait tendre A vers $+\infty$ d'où
   $$f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2} - 2\int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^3} dt.$$
5. Comme $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ est convergente, avec l'équivalent obtenu en 0 de f, on en déduit que f est de signe constant et que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ converge. En $+\infty$, la limite de $x^{3/2} f(x)$ est nulle en effet on a
   $$x^{3/2} f(x) = \frac{\cos(x)}{x^{1/2}} - 2x^{3/2} \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^3} dt.$$
   Le premier terme de la somme tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Par ailleurs
   $$\left| x^{3/2} \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t^3} dt \right| \leqslant \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt.$$
   on en conclut que le deuxième terme de la somme tend vers 0 aussi. Par conséquent d'après la règle de négligeabilité, on a $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est convergente donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.
6. Soit $a < A$, on effectue une intégration par parties
   $$\int_a^A f(x)dx = [xf(x)]_a^A - \int_a^A tf'(t)dt = Af(A) - af(a) + \int_a^A \frac{\sin(t)}{t} dt$$
   On fait tendre a vers 0 puis A vers $+\infty$; il vient $\displaystyle\lim_{A \to +\infty} Af(A) = 0$ par la question 4 (avec $t^3 \geqslant xt^2$), donc :
   $$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Sujet 1.3

Soit n un entier naturel non nul. Soit l'équation :

$$(E_n) \qquad x^{n+1} = 1 + x + \ldots + x^n,$$

1. Montrer que, pour $x \neq 1$, l'équation (E_n) est équivalente à l'équation suivante : $x^{n+2} - 2x^{n+1} + 1 = 0$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) admet une unique solution u_n qui appartient à $I =]1, 2]$.
3. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
4. Montrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite a.
5. Montrer que la série de terme général $a - u_n$ converge.
6. Étudier la nature de la série de terme général $w_n = u_n - a + \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

Sujet 1.3 au format de l'année 2025

Soit n un entier naturel non nul. Soit l'équation :

$$(E_n) \qquad x^{n+1} = 1 + x + \ldots + x^n,$$

1. Montrer que, pour $x \neq 1$, l'équation (E_n) est équivalente à l'équation suivante : $x^{n+2} - 2x^{n+1} + 1 = 0$.
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation (E_n) admet une unique solution u_n qui appartient à $I =]1, 2]$.
   (b) Montrer que la suite (u_n) converge et préciser sa limite a.
3. (a) Étudier la nature de la série de terme général $a - u_n$.
   (b) Étudier la nature de la série de terme général $w_n = u_n - a + \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

Solution du sujet 1.3

1. On constate que pour $x = 1$ et $n \geqslant 1$, l'équation (E_n) n'est pas vérifiée. Soit $x \neq 1$. Alors
$$(E_n) \Leftrightarrow x^{n+1} = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} \Leftrightarrow x^{n+2} - x^{n+1} = x^{n+1} - 1 \Leftrightarrow x^{n+2} - 2x^{n+1} + 1 = 0$$
2. On étudie la fonction $f_n : x \mapsto x^{n+2} - 2x^{n+1} + 1$ sur $I = [1, 2]$. On a :
$$f_n'(x) = (n+2)x^{n+1} - 2(n+1)x^n = x^n((n+2)x - 2(n+1)) = (n+2)x^n(x - \alpha_n) \text{ avec } \alpha_n = \frac{2(n+1)}{n+2} \in]1, 2[.$$
Donc :

x	1		α_n		2
f_n	0	$\searrow$	$f_n(\alpha_n) < 0$	$\nearrow$	1

Par théorème de la bijection (à bien justifier) f_n admet un unique zéro u_n tel que $1 < \alpha_n < u_n < 2$.
3. On a :
$$f_n(u_{n+1}) = f_n(u_{n+1}) - f_{n+1}(u_{n+1}) = \left(u_{n+1}^{n+1}(u_{n+1}-2)+1\right) - \left(u_n^{n+2}(u_{n+1}-2)+1\right) = (u_{n+1}-2)u_{n+1}^{n+1}(1-u_{n+1}) < 0,$$
car $u_{n+1} \in]1, 2[$. Ainsi $f_n(u_{n+1}) < 0 = f_n(u_n)$; comme f_n est strictement croissante sur $]\alpha_n, 2[$ et que $\alpha_n < \alpha_{n+1} < u_{n+1} < 2$, on en déduit que $u_{n+1} < u_n$. Ainsi $\boxed{\text{la suite } u \text{ est strictement croissante.}}$
4. Comme $2 > u_n > \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 2$, par théorème d'encadrement, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.
Remarque : la suite (u_n) est monotone bornée, donc convergente, mais cela ne donne pas sa limite.
5. On a $n^2(2 - u_n) = \frac{n^2}{u_n^{n+1}} = \mathrm{e}^{2\ln n - (n+1)\ln(u_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissances comparées, car (u_n) tend vers 2.
Donc la série de terme général $2 - u_n$ converge (Riemann).
6. Comme $2 - u_n = \frac{1}{u_n^{n+1}}$, on a $w_n = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{u_n^{n+1}} = \dfrac{u_n^{n+1} - 2^{n+1}}{(2u_n)^{n+1}}$.
Or $2 - \frac{2}{n+2} \leqslant u_n \leqslant 2$, donc $0 \leqslant u_n^{n+1} \leqslant 2^{n+1}$, donc $|u_n^{n+1} - 2^{n+1}| \leqslant 2 \times 2^{n+1}$.
Et $(2u_n)^{n+1} \geqslant 2^{n+1}\left(2 - \frac{2}{n+2}\right)^{n+1}$.
Donc : $|w_n| \leqslant \dfrac{2}{\left(2 - \frac{2}{n+2}\right)^{n+1}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times \dfrac{1}{\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+1}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
Donc, par comparaison avec un série géométrique, la série $\sum w_n$ converge.

Sujet 1.4

Soit I un intervalle. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *absolument monotone* sur I si

$$f \text{ est de classe } C^{\infty} \text{ sur } I \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) \geqslant 0.$$

1. Soit la fonction f de classe C^{∞} sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ définie par $f(x) = \tan(x)$.
   (a) et $n \in \mathbb{N}$. En utilisant la relation $f' = 1 + f^2$, exprimer $f^{(n+1)}$ en fonction $f, f', \ldots, f^{(n)}$.
   (b) En déduire que f est absolument monotone sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

On revient maintenant au cas général. Soit $a > 0$ et f une fonction de $I = [0, a[$ dans $\mathbb{R}$ absolument monotone sur $[0, a[$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On pose, pour $x \in I$, $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt.$

2. Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$.
3. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\dfrac{R_n(x)}{x^{n+1}} = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)\, du.$
4. En déduire que la fonction $x \mapsto \dfrac{R_n(x)}{x^{n+1}}$ est croissante sur $]0, a[$.
5. Déduire des deux questions précédentes que si $0 < x < y < a$, alors $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\dfrac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$.

   En déduire que pour tout $x \in [0, a[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Les questions suivantes concernent la fonction $f : x \to \tan x$ définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

6. Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, la série $\sum \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$ est convergente et que $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.
7. On pose $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$. On suppose que $0 < x < \dfrac{\pi}{8}$. Montrer que $|\tan(x) - S_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
   Quelle valeur de n peut-on prendre pour obtenir une valeur approchée de $\tan(1/4)$ à 10^{-9} près ?
8. On pose, pour $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$
9. En utilisant le résultat de la question précédente, écrire un script Python qui n'utilise que les opérations $+, -, *$ et $/$, et qui permet d'obtenir une valeur approchée de $\tan\left(\dfrac{1}{4}\right)$ à 10^{-9} près.

Sujet 1.4 au format de l'année 2025

Soit I un intervalle. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *absolument monotone* sur I si

$$f \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } I \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) \geqslant 0.$$

1. Soit f la fonction classe C^∞ sur $I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ définie par $f(x) = \tan(x)$
   (a) En remarquant que $f' = 1 + f^2$, exprimer $f^{(n+1)}$ en fonction $f,\ f', \ldots, f^{(n)}$.
   (b) En déduire que f est absolument monotone sur I.

On revient maintenant au cas général. Soit $a > 0$ et f une fonction de $I = [0, a[$ dans $\mathbb{R}$ absolument monotone sur $[0, a[$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On pose, pour $x \in I$, $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$.

2. (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\dfrac{R_n(x)}{x^{n+1}} = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)\,du$.
   (b) En déduire que la fonction $x \mapsto \dfrac{R_n(x)}{x^{n+1}}$ est croissante sur $]0, a[$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes que si $0 < x < y < a$, alors $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\dfrac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$.
   (d) En déduire que pour tout $x \in [0, a[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

3. Montrer que pour tout $]-\pi/2, \pi/2[$, $\tan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Solution du sujet 1.4

1. (a) On a $f' = 1 + f^2$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la formule de Leibniz donne

$$f^{(n+1)} = (f')^{(n)} = (f \times f)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} f^{(n-k)}.$$

   (b) D'après la question (a), par récurrence forte évidente sur $n \geqslant 1$ puisque pour $n = 0$ et $n = 1$, on a $f^{(n)} \geqslant 0$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$.

2. C'est la formule de Taylor reste intégral. On la montre par récurrence sur n en intégrant par parties $\displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$ en posant $u(t) = -\dfrac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$, $u'(t) = \dfrac{(x-t)^n}{n!}$ et $v(t) = f^{(n+1)}(t)$.

3. On pose $u = \frac{t}{x}$: $R_n(x) = \displaystyle\int_0^x x^n \frac{\left(1 - \frac{t}{x}\right)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt = \int_0^1 x^n \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu) \times x du$.

4. Si $0 < x \leqslant y$ et $u \in [0,1]$, $0 < xu \leqslant yu$ et donc $f^{(n+1)}(xu) \leqslant f^{(n+1)}(yu)$ car $f^{(n+2)} \geqslant 0$ d'où $\displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)\,du \leqslant \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(yu)\,du$.

5. Si $y \in]0, a[$, $f(y) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} y^k + R_n(y) \geqslant R_n(y)$ donc $R_n(y) \leqslant f(y)$.

   Si $0 < x < y$, $\dfrac{R_n(x)}{x^{n+1}} \leqslant \dfrac{R_n(y)}{y^{n+1}} \leqslant \dfrac{f(y)}{y^{n+1}}$ donc $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\dfrac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$.

   Soit $x \in [0, a[$ et $y \in]x, a[$, $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\dfrac{x}{y}\right)^{n+1} f(y)$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} R_n(x) = 0$ et $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$.

6. D'après Q1 et Q6.

7. En prenant $0 < x < \dfrac{\pi}{8}$ et $y = \dfrac{\pi}{4}$On a $0 \leqslant R_n(x) \leqslant \left(\dfrac{x}{y}\right)^{n+1} f(y) \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$ car $\dfrac{x}{y} \leqslant \dfrac{1}{2}$

   donc $|R_n(x)| = |\tan(x) - S_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

   On a $2^{10} = 1024 \geqslant 10^3$ donc $2^{30} \geqslant 10^9$ donc $S_{29}\left(\dfrac{1}{4}\right)$ est une valeur approché de $\tan\left(\dfrac{1}{4}\right)$ à 10^{-9} près.

8. La démonstration de la question 1 donne si $n \geqslant 1$, $f^{(n+1)}(0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} f^{(k)}(0)\, f^{(n-k)}(0)$ donc $\dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n!} = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(0)\, f^{(n-k)}(0)}{k!\,(n-k)!}$.

9. Avec la question précédente :

```
import numpy as np
T=np.zeros(30)
T[0]=0
T[1]=1
for i in range(1,29):
    a=0
    for k in range(i):
        a=a+T[k]*T[i-k]
    T[i+1]=a/(i+1)
x,S=1,0
for i in range(30):
    S=S+T[i]*x
    x=x/4
```

Sujet 1.5

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^x \, \mathrm{d}t$ est définie si et seulement si $x > -1$.

Pour $x > -1$ on notera $\beta(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^x \, \mathrm{d}t$.
On admet que la fonction β ainsi définie est continue sur $]-1, +\infty[$.

2. Montrer que β est monotone et préciser son sens de variation.
3. Montrer que, pour tout $x > -1$, on a : $\beta(x+1) = \dfrac{2x+2}{2x+3}\beta(x)$.
4. Calculer la limite de $\beta(x)$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner une expression de $\beta(n)$ à l'aide de factorielles.
6. En admettant et en utilisant la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$, en déduire que la suite $(\beta(n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
7. Étudier la convergence de $\beta(x)$ lorsque le nombre **réel** x tend vers $+\infty$.

Sujet 1.5 au format de l'année 2025

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^x \, \mathrm{d}t$ est définie si et seulement si $x > -1$.

Pour $x > -1$ on notera $\beta(x) = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^x \, \mathrm{d}t$.

On admet que la fonction β ainsi définie est continue sur $]-1, +\infty[$.

2. (a) Déterminer une relation entre $\beta(x+1)$ et $\beta(x)$ pour tout $x > -1$.

   (b) Calculer la limite de $\beta(x)$ lorsque x tend vers -1 par valeurs supérieures.

3. (a) En admettant et en utilisant la formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$, déterminer la limite de la suite $(\beta(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) Étudier la convergence de $\beta(x)$ lorsque le nombre réel x tend vers $+\infty$.

Solution du sujet 1.5

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ la fonction $t \mapsto (1-t^2)^x$ est continue sur $[0,1[$ (voire en 1 si $x \geqslant 0$).
Ainsi l'intégrale n'est (éventuellement) impropre qu'en 1. Or :
$$(1-t^2)^x = (1+t)^x(1-t)^x \underset{t\to 1^-}{\sim} 2^x(1-t)^x \geqslant 0.$$
De plus, par ch. de variable $u = 1-t$ (de classe $\mathcal{C}^1$, strictement décroissant, bijectif de $]0,1]$ sur $[0,1[$) dans l'intégrale classique $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{u^{-x}}$ on obtient que : $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^x\ \mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > -1$.
Donc, par $\boxed{\text{th. de comparaison pour les intégrales impropres}}$ $\beta(x)$ converge si et seulement si $-x < 1$.
2. Pour tout $(x,y) \in]-1\ +\infty[^2$ t.q. $x \leqslant y$ et tout $t \in]-1,1[$, comme $1-t^2 \in [0,1[$, on : $(1-t^2)^x \geqslant (1-t^2)^y$.
Donc, par $\boxed{\text{croissance de l'intégration,}}$ on obtient $\beta(y) \geqslant \beta(x)$. Ainsi $\boxed{\beta \text{ est décroissante sur }]-1+\infty[.}$
3. Par $\boxed{\text{intégration par parties}}$ avec : $\begin{cases} u(t) = (1-t^2)^{x+1}\ u'(t) = (x+1)(-2t)(1-t^2)^x \\ v'(t) = 1\ v(t) = t \qquad (u, v\ C^1 \text{ sur } [0,1[). \end{cases}$
$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-t^2)^{x+1}\,\mathrm{d}t &= \Big[\ (1-t^2)^{x+1}t\ \Big]_{t=0}^{t\to 1} - \int_0^1 (x+1)(-2t)(1-t^2)^x t\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + 2(x+1)\int_0^1 t^2(1-t^2)^x\,\mathrm{d}t \qquad \text{le crochet converge car } x+1>0 \\ &= 2(x+1)\big(-\beta(x+1)+\beta(x)\big),\ \text{car } t^2(1-t^2)^x = (1-t^2)^{x+1}-(1-t^2)^x \text{et tout converge.}\end{aligned}$$
Soit : $\underbrace{(2x+3)}_{\neq 0}\beta(x+1) = (2x+2)\beta(x)$, *i.e.* $\boxed{\forall x \in]-1,+\infty[,\ \beta(x+1) = \frac{2x+2}{2x+3}\beta(x).}$
4. Comme $\boxed{\beta \text{ est continue en 0,}}$ on a : $\beta(x) = \underbrace{\dfrac{2x+3}{2x+2}}_{\underset{x\to -1^+}{\longrightarrow} +\infty} \underbrace{\beta(x+1)}_{\underset{x\to -1^+}{\longrightarrow} \beta(0)=1} \underset{x\to -1^+}{\longrightarrow} \boxed{+\infty.}$
5. On a : $\beta(n) = \frac{2n}{2n+1}\beta(n-1)$. Donc : $\beta(n) = \beta(0)\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{\left(\prod_{k=1}^n 2k\right)^2}{\left(\prod_{k=1}^n 2k\right)\left(\prod_{k=1}^n 2k+1\right)} = \boxed{\frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.}$
6. On peut remplacer n par $2n$ dans la formule de Stirling. Alors :
$$\beta(n) = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)(2n)!} = \frac{2^{2n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} 2\pi n}{(2n+1)\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\sqrt{2\pi(2n)}} = \frac{\sqrt{\pi n}}{(2n+1)} \boxed{\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$
Remarque : si l'on ne pense pas à écrire astucieusement $(2n+1)! = (2n+1)\times(2n)!$, on arrive aussi à ce résultat en remplaçant n par $2n+1$ dans la formule de Stirling, puis en montrant que :
$$\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{-1}.$$
7. Puisque β est décroissante, on a, pour tout $x \geqslant 0$: $\boxed{\beta\big(\lfloor x\rfloor + 1\big) \leqslant \beta(x) \leqslant \beta\big(\lfloor x\rfloor\big).}$
Par ailleurs, comme $\lfloor x\rfloor$ est un entier et que $\lfloor x\rfloor \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, d'après Q6, on a :
$$\beta\big(\lfloor x\rfloor + 1\big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad \beta\big(\lfloor x\rfloor\big) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$
d'où, $\boxed{\text{par théorème d'encadrement : } \beta(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$

Autre idée : la limite existe par th.de la limite monotone ; elle vaut 0 d'après la question précédente.

CHAPITRE

2

ALGÈBRE

Sujet 2.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[x]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ constitué des éléments de $\mathbb{R}[x]$ de degré inférieur ou égal à n.
Soient $(n+1)$ nombres réels deux à deux distincts : $x_0, x_1, \ldots, x_n$.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on considère la fonction polynomiale P_k définie par

$$P_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

1. Calculer $P_k(x_i)$ pour tout couple $(k, i) \in [\![0, n]\!]^2$.
2. Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
3. (a) Soit $Q \in \mathbb{R}_n[x]$. Démontrer que $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q(x_k) P_k$.

   (b) Pour tout $m \in [\![1, n]\!]$, calculer $s_m = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k^m P_k(0)$.
4. Dans cette question, Q est un élément de $\mathbb{R}[x]$.

   On pose $Q_1 = Q - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q(x_k) P_k$.

   (a) Démontrer que Q_1 admet au moins $n+1$ racines réelles distinctes.

   (b) On pose $s_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k^{n+1} P_k(0)$ et $s_{n+2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k^{n+2} P_k(0)$.

   Déduire de la question précédente que $s_{n+1} = (-1)^n \displaystyle\prod_{k=0}^{n} x_k$, puis calculer s_{n+2}.

   On exprimera le résultat en fonction de n, de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$ et de $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} x_k$.

Sujet 2.1 au format de l'année 2025

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathbb{R}[x]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales à coefficients réels et $\mathbb{R}_n[x]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$ constitué des éléments de $\mathbb{R}[x]$ de degré inférieur ou égal à n.
Soient $(n+1)$ nombres réels deux à deux distincts : $x_0, x_1, \ldots, x_n$.
Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on considère la fonction polynomiale P_k définie par

$$P_k(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^{n} \frac{x - x_j}{x_k - x_j}.$$

1. (a) Montrer que $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base $\mathcal{L}$ de $\mathbb{R}_n[x]$.
   (b) Soit $Q \in \mathbb{R}_n[x]$. Écrire Q dans la base $\mathcal{L}$.
2. Pour tout $m \in [\![1, n]\!]$, calculer $s_m = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k^m P_k(0)$.
3. Dans cette question, Q est un élément de $\mathbb{R}[x]$.

   On pose $Q_1 = Q - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q(x_k) P_k$.

   (a) Démontrer que Q_1 admet au moins $n+1$ racines réelles distinctes.
   (b) Calculer $s_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k^{n+1} P_k(0)$ puis $s_{n+2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k^{n+2} P_k(0)$.

Solution du sujet 2.1

1. On a pour tout i et tout $k, P_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
2. Observons tout d'abord que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(P_k) = n$ donc $P_k \in \mathbb{R}_n[x]$.

   Soit $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k = 0$. Soit $i \in [\![0, n]\!]$. En évaluant cette égalité en x_i, on trouve $\lambda_i = 0$. Donc pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\lambda_i = 0$, ce qui implique que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre dans $\mathbb{R}_n[x]$. Puisqu'elle comporte $n+1$ éléments et que $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n+1$, on en déduit que la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$.
3. (a) Soit $Q \in \mathbb{R}_n[x]$. Puisque la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[x]$, il existe une famille (unique) de scalaires $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ telle que $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k P_k$.

   Soit $k \in [\![0, n]\!]$. En évaluant en x_k, on trouve $Q(x_k) = \lambda_k$ soit $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q(x_k) P_k$.

   (b) Soit $m \in [\![1, n]\!]$. Soit $Q = X^m$. D'après la question précédente, on a $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k^m P_k$.

   Ainsi, on a $s_m = Q(0) = 0$.
4. (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. On a $Q_1(x_i) = Q(x_i) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} Q(x_k) P_k(x_i) = Q(x_i) - Q(x_i) = 0$, (cf. Q1) donc Q_1 admet au moins $n+1$ racines réelles distinctes que sont les x_i, pour $i \in [\![0, n]\!]$.

   (b) Soit $Q = X^{n+1}$. Alors $Q_1 = X^{n+1} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k^{n+1} P_k$, donc $Q_1(0) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k^{n+1} P_k(0) = -s_{n+1}$.
   Les polynômes P_k, pour $0 \leqslant k \leqslant n$ étant tous de degré n, alors Q_1 est de degré $n+1$ et de coefficient dominant égal à 1. Or, d'après la question précédente, il admet au moins $n+1$ racines que sont les x_k pour $0 \leqslant k \leqslant n$. Donc $Q_1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (X - x_k)$, d'où $Q_1(0) = (-1)^{n+1} \displaystyle\prod_{k=0}^{n} x_k$.

   En comparant les deux expressions de $Q_1(0)$, on en déduit $s_{n+1} = (-1)^n \displaystyle\prod_{k=0}^{n} x_k$.

   Pour le calcul de s_{n+2}, posons cette fois $Q = X^{n+2}$.
   Alors $Q_1 = X^{n+2} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k^{n+2} P_k$, donc $Q_1(0) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k^{n+2} P_k(0) = -s_{n+2}$.
   Comme précédemment, Q_1 est un polynôme unitaire, de degré $n+2$ dont on connaît $n+1$ racines, donc il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $Q_1 = (X - a) \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (X - x_k)$.
   En utilisant les relations coefficients-racines, on sait que la somme des racines de Q_1 est le coefficient de Q_1 devant X^{n+1} donc $a + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k = 0$, i.e. $a = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$.
   Ainsi, $Q_1 = \left(X + \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k\right) \displaystyle\prod_{k=0}^{n} (X - x_k)$,
   d'où $Q_1(0) = (-1)^{n+1} \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k\right) \displaystyle\prod_{k=0}^{n} x_k$.

   En comparant les deux expressions de $Q_1(0)$, on en déduit $\boxed{s_{n+2} = (-1)^n \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k\right) \displaystyle\prod_{k=0}^{n} x_k.}$

Sujet 2.2

Soit un entier $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels et I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On désigne par $\mathrm{Ker}(M)$ et $\mathrm{Im}(M)$ respectivement le noyau et l'image d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et par $\mathrm{Sp}(M)$ l'ensemble de ses valeurs propres. On munit l'espace euclidien des matrices colonnes de taille n, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de son produit scalaire usuel $(U, V) = {}^tUV$ pour U, $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ et Y un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre $\mu \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\mu \neq \lambda$ alors les vecteurs X et Y sont orthogonaux.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{Ker}({}^tA - \lambda \mathrm{I}_n)^{\perp} = \mathrm{Im}(A - \lambda \mathrm{I}_n)$.
3. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tels que $\mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{I}_n) = \mathrm{Vect}(X)$.
   (a) Montrer qu'il existe $Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{Ker}({}^tA - \lambda \mathrm{I}_n) = \mathrm{Vect}(Y)$.
   (b) Montrer que si X et Y sont orthogonaux alors $\mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{I}_n) \neq \mathrm{Ker}((A - \lambda \mathrm{I}_n)^2)$.
   (c) En déduire que si X et Y sont orthogonaux, alors A n'est pas diagonalisable.(On pourra raisonner par l'absurde).
   (d) Montrer que si X et Y ne sont pas orthogonaux alors $\mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{I}_n) = \mathrm{Ker}((A - \lambda \mathrm{I}_n)^2)$.
4. Dans cette question, on suppose que A est diagonalisable et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $X \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tels que $\mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{I}_n) = \mathrm{Vect}(X)$. Soient $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n\}$ l'ensemble des valeurs propres de A et $Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ une matrice colonne donnée par la question 3) (a) telle que $\mathrm{Ker}({}^tA - \lambda \mathrm{I}_n) = \mathrm{Vect}(Y)$. Montrer que la matrice $A + X\,{}^tY$ est diagonalisable et déterminer $\mathrm{Sp}(A + X\,{}^tY)$.

Sujet 2.2 au format de l'année 2025

Soit un entier $n \geqslant 2$. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels. On munit l'espace euclidien des matrices colonnes de taille n, $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de son produit scalaire canonique $(U, V) = {}^tUV$ pour U, $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. (a) Soit X un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ et Y un vecteur propre de ${}^tA$ associé à la valeur propre $\mu \in \mathbb{R}$. Montrer que si $\mu \neq \lambda$ alors les vecteurs X et Y sont orthogonaux.

   (b) On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tels que $\mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{I}_n) = \mathrm{Vect}(X)$.
2. (a) Montrer qu'il existe $Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tel que $\mathrm{Ker}({}^tA - \lambda \mathrm{I}_n) = \mathrm{Vect}(Y)$.

   (b) Montrer que si X et Y sont orthogonaux alors $\mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{I}_n) \neq \mathrm{Ker}((A - \lambda \mathrm{I}_n)^2)$.

   (c) En déduire que si X et Y sont orthogonaux, alors A n'est pas diagonalisable.
3. Montrer que si X et Y ne sont pas orthogonaux alors $\mathrm{Ker}(A - \lambda \mathrm{I}_n) = \mathrm{Ker}((A - \lambda \mathrm{I}_n)^2)$.

Solution du sujet 2.2

1. On a $(A\,X,Y)=\lambda(X,Y)=(X,\,{}^tA\,Y)=\mu\,(X,Y)$.
   Ainsi, il vient $(\lambda-\mu)\,(X,Y)=0$ avec $\lambda\neq\mu$ par hypothèse. On conclut donc que $(X,Y)=0$.
2. Soit $Z\in\mathrm{Im}(A-\lambda\mathrm{I}_n)$. Il existe donc $U\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $Z=(A-\lambda\mathrm{I}_n)U$. Soit $V\in\mathrm{Ker}({}^tA-\lambda\mathrm{I}_n)$. Il vient alors $(Z,V)=((A-\lambda\mathrm{I}_n)U,V)=(U,({}^tA-\lambda\mathrm{I}_n)\,V)=0$ donc $Z\in\mathrm{Ker}({}^tA-\lambda\mathrm{I}_n)^{\perp}$.
   Ainsi : $\mathrm{Im}(A-\lambda\mathrm{I}_n)\subset\mathrm{Ker}({}^tA-\lambda\mathrm{I}_n)^{\perp}$.
   Cette inclusion est une égalité d'après l'égalité des dimensions (via le théorème du rang).
3. (a) De l'hypothèse, on déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(A-\lambda\mathrm{I}_n))=1$. Or comme $\mathrm{rang}(A-\lambda\mathrm{I}_n)=\mathrm{rang}({}^tA-\lambda\mathrm{I}_n)$, il vient par théorème du rang que $\dim(\mathrm{Ker}({}^tA-\lambda\mathrm{I}_n)=\dim(\mathrm{Ker}(A-\lambda\mathrm{I}_n)=1$.
   Il existe donc $Y\in M_{n,1}(\mathbb{R})\setminus\{0\}$ tel que $\mathrm{Ker}({}^tA-\lambda\mathrm{I}_n)=\mathrm{Vect}(Y)$.
   (On aurait pu aussi utiliser la question 2)).

   (b) En utilisant 2), on a $\mathrm{Vect}(Y)^{\perp}=\mathrm{Ker}({}^tA-\lambda\mathrm{I}_n)^{\perp}=\mathrm{Im}(A-\lambda\mathrm{I}_n)$.
   Or X et Y sont orthogonaux, on a donc $X\in\mathrm{Im}(A-\lambda\mathrm{I}_n)$.
   Ainsi, il existe $U\in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tel que $X=(A-\lambda\mathrm{I}_n)U$.
   D'une part, comme $X\neq0$, on a $U\notin\mathrm{Ker}(A-\lambda\mathrm{I}_n)$.
   D'autre part, comme $X\in\mathrm{Ker}(A-\lambda\mathrm{I}_n)$, on a $(A-\lambda\mathrm{I}_n)^2U=(A-\lambda\mathrm{I}_n)X=0$.
   Ainsi $U\in\mathrm{Ker}((A-\lambda\mathrm{I}_n)^2)$. On conclut alors que $\mathrm{Ker}(A-\lambda\mathrm{I}_n)\neq\mathrm{Ker}\big((A-\lambda\mathrm{I}_n)^2\big)$.

   (c) Supposons par l'absurde que A soit diagonalisable et semblable à une matrice diagonale Δ. Alors
   $$\mathrm{rg}(A-\lambda\mathrm{I}_n)=\mathrm{rg}(\Delta-\lambda\mathrm{I}_n)=\mathrm{rg}((\Delta-\lambda\mathrm{I}_n)^2)\underset{\text{(nb. val. propres non nulles)}}{=}\mathrm{rg}((A-\lambda\mathrm{I}_n)^2),$$
   en contradiction avec 3.b).

   (d) On montre aisément que $\mathrm{Ker}(A-\lambda\mathrm{I}_n)\subset\mathrm{Ker}((A-\lambda\mathrm{I}_n)^2)$.
   Montrons l'autre inclusion. Soit $U\in\mathrm{Ker}\big((A-\lambda\mathrm{I}_n)^2\big)$.
   On a alors $(A-\lambda\mathrm{I}_n)U\in\mathrm{Im}(A-\lambda\mathrm{I}_n)\cap\mathrm{Ker}(A-\lambda\mathrm{I}_n)$.
   Ainsi, d'une part, il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $(A-\lambda\mathrm{I}_n)U=\alpha X$.
   D'autre part, comme $\mathrm{Vect}(Y)^{\perp}=\mathrm{Im}(A-\lambda\mathrm{I}_n)$, on a $((A-\lambda\mathrm{I}_n)U,Y)=0=\alpha(X,Y)$ avec $(X,Y)\neq0$.
   On déduit que $\alpha=0$. Ainsi, $U\in\mathrm{Ker}(A-\lambda\mathrm{I}_n)$.
4. Comme A est diagonalisable et $\mathrm{Ker}(A-\lambda\mathrm{I}_n)=\mathrm{Vect}(X)$ avec $X\neq0$, il existe une base de vecteurs propres $(X,U_2,\dots U_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telle que $AX=\lambda X$ et $A\,U_i=\lambda_i\,U_i$ avec $\lambda_i\neq\lambda$ pour $i\in\{2,\dots n\}$.
   Comme $\lambda\neq\lambda_i$ et que Y est un vecteur propre de ${}^tA$ pour la valeur propre λ.
   On déduit de la question 1. que $(Y,U_i)=0$ pour $i\in[\![2,n]\!]$.
   Ainsi, il vient $(A+X\,{}^tY)U_i=AU_i+(Y,U_i)X=\lambda_iU_i$ pour $i\in\{2,\dots,n\}$.
   De plus, $(A+X\,{}^tY)X=\lambda X+(Y,X)\,X=(\lambda+(Y,X))\,X$.
   Donc $(X,U_2,\dots U_n)$ est une base de vecteurs propres de $A+X\,{}^tY$ avec pour valeurs propres associées $\lambda+(Y,X),\lambda_2,\lambda_3,\dots,\lambda_n$. $A+X\,{}^tY$ est donc diagonalisable et $\mathrm{Sp}(A+X\,{}^tY)=\{\lambda+(X,Y),\lambda_2,\dots,\lambda_n\}$.

Sujet 2.3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^{n+1}$ de son produit scalaire canonique et de la nome associée. On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$.

On note u le vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} e_i$.

On désigne par H l'orthogonal de la droite engendrée par u.
Pour tout j de $[\![1, n]\!]$, on pose :

$$v_j = \sqrt{\frac{j}{j+1}} \left(\sum_{k=1}^{j} -\frac{1}{j} e_k + e_{j+1} \right)$$

Enfin, on note aussi $v = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i$ un vecteur fixé de $\mathbb{R}^{n+1}$ (avec $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ fixés).

1. Montrer que $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est une base orthonormée de H.
2. Déterminer $\displaystyle\inf_{w \in H} \|v - w\|$. Ce réel est noté $d(v, H)$.
3. On définit l'application $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ par :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \|v - w\|^2 \text{ avec } w = \sum_{i=1}^{n+1} x_i e_i \in H.$$

   (a) Montrer qu'on définit bien ainsi une application f, et donner une expression simplifiée de $f(x_1, \ldots, x_n)$.
   (b) Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^n$.
   (c) Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$ et le calculer.
   (d) Comparer avec le résultat de la question 3.

Sujet 2.3 au format de l'année 2025

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}^{n+1}$ de son produit scalaire canonique et de la nome associée.

On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, u le vecteur de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par $u = \sum_{i=1}^{n+1} e_i$ et H l'orthogonal de la droite engendrée par u.

Pour tout j de $[\![1, n]\!]$, on pose :

$$v_j = \sqrt{\frac{j}{j+1}} \left(\sum_{k=1}^{j} -\frac{1}{j} e_k + e_{j+1} \right)$$

1. Montrer que $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est une base orthonormée de H.
2. Soit $v = \sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i$ un vecteur fixé de $\mathbb{R}^{n+1}$. Déterminer $d(v, H) = \inf_{w \in H} \|v - w\|$.
3. On définit l'application $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ par :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \|v - w\|^2 \text{ avec } w = \sum_{i=1}^{n+1} x_i e_i \in H.$$

   (a) Montrer que f admet un minimum global sur $\mathbb{R}^n$ et le calculer.

   (b) Comparer avec le résultat de la question 2.

Solution du sujet 2.3

1. Il est clair que les v_j appartiennent H car $\{u, v_j\} = j\frac{-1}{j} + 1 = 0$.
   De plus
   - Soit $1 \leqslant j < k \leqslant n$. Alors $\langle v_j, v_k\rangle = \sqrt{\frac{j}{j+1}}\sqrt{\frac{k}{k+1}}\left(j(-\frac{1}{j})(-\frac{1}{k}) + (-\frac{1}{k})\right) = \sqrt{\frac{j}{j+1}}\sqrt{\frac{k}{k+1}}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k}\right) = 0$
   - Puis, $\forall j, \|v_j\|^2 = \frac{j}{j+1}\left(j(-\frac{1}{j})^2 + 1\right) = \frac{j}{j+1}\left(\frac{1}{j} + 1\right) = 1$

   C'est une famille orthonormée, donc libre.
   Or H est un hyperplan de $\mathbb{R}^{n+1}$, il est de dimension n égale au cardinal de la famille.
   Donc c'est une base orthonormée.
2. D'après le cours, cet inf est un min égal à $\|v - v_H\|^2$, où v_H est le projeté orthogonal de v sur H.
   Calculons $v_H = (b_1, \ldots, b_n, b_{n+1})$; on a :
   $$v - v_H \perp H \underset{H=u^\perp}{\iff} \exists k \in \mathbb{R},\ v_H - v = ku \iff \forall i \in [\![1,\ n+1]\!], b_i = a_i + k.$$
   En ajoutant toutes ces équations, et tenant compte de $b_{n+1} = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_i$ on obtient :
   $$0 = \sum_{i=1}^{n+1} a_i + (n+1)k \Rightarrow k = -\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} a_i = -\frac{\sigma}{n+1}, \text{avec } \sigma = \sum_{i=1}^{n+1} a_i.$$
   Finalement, $\boxed{\inf_{w\in H} \|v - w\| = \|v - v_H\|^2 = \sum_{i=1}^{n+1}(a_i - b_i)^2 = \frac{\sigma^2}{n+1}.}$
3. (a) Comme $w \in H$, on a $x_{n+1} = -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$, donc $\|v - w\|^2$ ne dépend que de $x_1, \ldots, x_n$.
   Ainsi f est bien définie et $\boxed{f(x_1, \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - a_i)^2 + \left(a_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2.}$

   (b) On a : $\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \partial_i f(x_1, \ldots, x_n) = 2(x_i - a_i) - 2\left(a_{n+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$.
   Les points critiques de f sont donc caractérisés par : $\forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i - a_i = a_{n+1} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \quad (\star)$.
   En sommant de 1 à n, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} a_i = na_{n+1} - n\sum_{i=1}^{n} x_i$, d'où $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(a_i + a_{n+1})$.
   En réinjectant dans $(\star)$ il y a un unique point critique $(y_1, \ldots, y_n)$ donné par :
   $$\forall i \in [\![1, \ldots, n]\!],\ y_i - a_i = a_{n+1} - \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}(a_i + a_{n+1}) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} a_i.$$

   (c) Donc $f(y_1, \ldots, y_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1}(y_i - a_i)^2 = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i\right)^2$.
   Pour montrer que c'est un minimum global, on remarque que $\displaystyle\lim_{||x||\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   Ainsi pour $A > \frac{\sigma^2}{n+1}$, il existe R tel que si $||x|| > R$, on a $||f(x)|| \geqslant A$.
   Sur le fermé borné $\overline{B}(0, R)$, la fonction continue f est bornée et atteint son minimum.
   Comme $\mathbb{R}^n$ est ouvert il est atteint en un point critique de f qui qui ne peut être que $(y_1, \ldots, y_n)$.

   (d) en Conclusion : on constate l'égalité entre $\min(f)$ et la distance au carré de v à H.

Sujet 2.4

Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n.
Pour toute matrice $B \in E$ on note Φ_B l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall M \in E, \Phi_B(M) = BM$$

Soit $A \in E$ une matrice fixée.

1. (a) Montrer que si A est nilpotente (c'est-à-dire qu'il existe $p \geqslant 2$ tel que $A^p = 0$), alors Φ_A est nilpotent (c'est-à-dire qu'il existe $q \geqslant 2$ tel que $\Phi_A^q = 0$).
   (b) Soit P un polynôme. Trouver une matrice B telle que $P(\Phi_A) = \Phi_B$.
   (c) Montrer que A admet un polynôme annulateur (non nul).
   Montrer que A et Φ_A ont les mêmes polynômes annulateurs.
2. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A pour que Φ_A soit un isomorphisme de E.

Dans la question 3, on admet le résultat suivant (qui sera à démontrer dans la question 4) :
Une matrice B est diagonalisable si et seulement s'il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ distincts tels que le polynôme m défini par $m(x) = \prod_{k=1}^{p}(x - \lambda_k)$ soit annulateur de B.

3. Montrer que $A \in E$ est diagonalisable si et seulement si Φ_A est diagonalisable.
4. *Démonstration du résultat admis.*
   (a) Soient u, v deux endomorphisme d'un espace vectoriel de dimansion finie. Montrer que :

   $$\dim(\operatorname{Ker}(u \circ v)) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Ker} v)$$

   (b) En déduire le résultat admis.

Sujet 2.4 au format de l'année 2025

Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre n.
Pour toute matrice $A \in E$ donnée, on note Φ_A l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall M \in E, \Phi_A(M) = AM$$

1. Montrer que A et Φ_A ont les mêmes valeurs propres.
2. On suppose que A est diagonalisable.
   (a) Montrer que ${}^tA$ est diagonalisable.
   (b) Montrer que Φ_A est diagonalisable.
3. (a) Soient u, v deux endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Montrer que :

$$\dim(\operatorname{Ker}(u \circ v)) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Ker} v)$$

   (b) Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A admet un polynôme annulateur qui n'a que des racines simples.
   (c) On suppose que Φ_A est diagonalisable. Montrer que A est diagonalisable.

Solution du sujet 2.4

1. (a) Par récurrence évidente sur $k \geqslant 0$, on a $(\Phi_A)^k(M) = \Phi_{A^k}(M)$ pour tout M, *i.e.* $(\Phi_A)^k = \Phi_{A^k}$. Donc $q = p$ convient.

   (b) On vient de voir que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $(\Phi_A)^k = \Phi_{A^k}$.
   Si $P(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{p} a_j x^j$, pour tout $M \in E$, on a alors $P(\Phi_A)(M) = \Phi_{P(A)}(M)$.
   Ainsi $\boxed{P(\Phi_A) = \Phi_{P(A)}.}$

   (c) La famille $(I, A, \ldots, A^{n^2})$ est de cardinal $n^2 + 1$ dans E de dimension n^2 ; elle est donc liée.
   Ainsi A possède un polynôme annulateur P.
   D'après la question précédente tout polynôme P annulateur A est un polynôme annulateur de Φ_A.
   Réciproquement si $P(\Phi_A) = 0$, alors, pour tout $M \in E$, on a $P(A)M = 0$.
   En prenant $M = I_n$, on obtient $P(A) = 0$.

2. Si A est inversible, alors $\Phi_A \circ \Phi_{A^{-1}} = \Phi_{A^{-1}} \circ \Phi_A = \mathrm{Id}_E$, donc Φ_A bijective.
   Réciproquement (par contraposée), si A n'est pas inversible, alors pour tout $X \in \operatorname{Ker} A \setminus \{0\}$, la matrice M dont les colonnes sont $(X, X, \ldots, X)$ appartient à $\operatorname{Ker} \Phi_A$,.
   Donc $\operatorname{Ker} \Phi_A \neq \{0\}$ donc Φ_A n'est pas injective, et donc n'est pas bijective.
   Une condition nécessaire et suffisante de bijectivité de Φ_A est donc $\boxed{A \text{ inversible.}}$

3. En passant par sa matrice dans une base, le résultat admis s'étend à un endomorphisme.
   Ainsi Φ_A est diagonalisable si et seulement s'il possède un polynôme annulateur scindé à racines simples.
   D'où l'équivalence puisque A et Φ_A ont les mêmes polynômes annulateurs (cf. Q1c).

4. (a) Soit w la restriction de u à l'image de v *i.e.* $w = u|_{\mathrm{Im}(v)}$.
   Alors w est une application linéaire de $\mathrm{Im}(v)$ dans $\mathrm{Im}(u \circ v)$. On a :
   $$\operatorname{Ker} w = \{y \in \mathrm{Im}(v) / u(y) = 0\} = \operatorname{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(v),\ \ \mathrm{Im}(w) = \{u(v(x)), x \in E\} = \mathrm{Im}(u \circ v)$$
   Le théorème du rang appliqué à w, puis à chaque endomorphisme u et v, permet d'écrire
   $$\dim(\mathrm{Im}(v)) = \dim(\operatorname{Ker}(u) \cap \mathrm{Im}(v)) + \dim(\mathrm{Im}(u \circ v)) \Leftrightarrow \dim(\operatorname{Ker}(u \circ v)) \leqslant \dim(\operatorname{Ker} u) + \dim(\operatorname{Ker} v)$$

   (b) Si A est diagonalisable, en prenant $m = \displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}\,(M)} (X - \lambda)$, on obtient classiquement que $m(A) = 0$.
   Réciproquement si $m(A) = 0$.
   On généralise la question précédente à plusieurs endomorphismes par récurrence. Il vient donc
   $$n \underset{m(A)=0}{=} \dim\left(\operatorname{Ker}(\prod_{k=1}^{p}(A - \lambda_k I)\right) \leqslant \sum_{k=1}^{p} \dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda_k I)) \leqslant n,$$
   car les sous espaces propres sont en somme directe.
   Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} \dim(\operatorname{Ker}(A - \lambda_k I)) = n$, ce qui montre que A est diagonalisable.

Sujet 2.5

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E, u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = v \circ u$ et vérifiant $\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Ker}(v) = \{0_E\}$.

On dit que λ est une valeur propre du couple (u, v) si $\operatorname{Ker}(u - \lambda v)$ n'est pas réduit à $\{0_E\}$. On note $\operatorname{Sp}(u, v)$ l'ensemble des valeurs propres du couple (u, v).

1. **Dans cette question seulement,** on suppose que $n = 2$ et que :
$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Montrer que le couple (u, v) vérifie les hypothèses de l'énoncé et déterminer $\operatorname{Sp}(u, v)$.
2. On suppose dans cette question que v est un isomorphisme de E sur E.
Montrer que $\operatorname{Sp}(u, v) = \operatorname{Sp}(v^{-1} \circ u)$,
où $\operatorname{Sp}(v^{-1} \circ u)$ désigne l'ensemble des valeurs propres de $v^{-1} \circ u$.
3. Soit λ et μ deux réels distincts. Montrer que $\operatorname{Ker}(u - \lambda v) \cap \operatorname{Ker}(u - \mu v) = \{0_E\}$.
4. Soit p un entier supérieur ou égal à 2. On considère dans cette question, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des réels deux à deux distincts et on suppose que les noyaux $\operatorname{Ker}(u - \lambda_k v)$, pour $k \in [\![1, p]\!]$ sont en somme directe.
Soient λ_{p+1} différent des autres λ_k.
   (a) Pour tout $k \in [\![1, p + 1]\!]$, on se donne $x_k \in \operatorname{Ker}(u - \lambda_k v)$ vérifiant $\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1} x_k = 0$.
   Montrer que :
      - l'on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} (\lambda_k - \lambda_{p+1}) v(x_k) = 0$;
      - pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a : $v(x_k) \in \operatorname{Ker}(u - \lambda_k v)$.

   (b) En déduire que les sous-espaces $\big(\operatorname{Ker}(u - \lambda_k v)\big)_{1 \leqslant k \leqslant p+1}$ sont en somme directe.
5. Montrer que le couple (u, v) possède au plus n valeurs propres distinctes.
6. Déduire de ce qui précède que $\operatorname{Im}(u) + \operatorname{Im}(v) = E$.

Sujet 2.5 au format de l'année 2025

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Soit E un espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{B}$ une base de E, u et v deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = v \circ u$ et vérifiant $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) = \{0_E\}$.

1. **Dans cette question seulement,** on suppose que $n = 2$ et que :
$$M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Montrer que le couple (u, v) vérifie les hypothèses de l'énoncé et déterminer $\mathrm{Ker}(u - \lambda v)$ suivant les valeurs de λ.
2. (a) On suppose dans cette question que v est un isomorphisme de E sur E. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \lambda v) \neq \{0\}$ si et seulement si λ est valeur propre de $v^{-1} \circ u$.
   (b) Soit λ et μ deux réels distincts. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \lambda v) \cap \mathrm{Ker}(u - \mu v) = \{0_E\}$.
3. Soit p un entier supérieur ou égal à 2. On considère dans cette question, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ des réels deux à deux distincts et on suppose que les noyaux $\mathrm{Ker}(u - \lambda_k v)$, pour $k \in [\![1, p]\!]$ sont en somme directe.
Soient λ_{p+1} différent des autres λ_k.

   (a) Pour tout $k \in [\![1, p+1]\!]$, on se donne $x_k \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_k v)$ vérifiant $\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1} x_k = 0$.
   Montrer que :
   - l'on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} (\lambda_k - \lambda_{p+1}) v(x_k) = 0$;
   - pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a : $v(x_k) \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_k v)$.

   (b) En déduire que les sous-espaces $\big(\mathrm{Ker}(u - \lambda_k v)\big)_{1 \leqslant k \leqslant p+1}$ sont en somme directe.

Solution du sujet 2.5

1. On vérifie bien que $M_{\mathcal{B}}(u) \times M_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}}(v) \times M_{\mathcal{B}}(u)$.
   D'autre part, on remarque que $\mathrm{Ker}(v) = \{0_E\}$, donc on a $\mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) = \{0_E\}$.
   On calcule, pour $\lambda \in \mathbb{R}, \det(M_{\mathcal{B}}(u - \lambda v)) = \lambda^2$, d'où : $Sp(u, v) = \{0\}$.
2. On a $u - \lambda v$ non bijectif si et seulement si $v^{-1}u - \lambda \mathrm{Id}$ non bijectif.
3. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda v) \cap \mathrm{Ker}(u - \mu v)$. Alors : $u(x) = \lambda v(x)$ et $u(x) = \mu v(x)$.
   D'où $v(x) = 0$, d'où $u(x) = 0$, donc $x \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v) = \{0_E\}$.
4. (a) • En appliquant v on obtient une première égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1} v(x_k) = 0$.
   Par ailleurs, appliquant u et en utilisant le fait que $u(x_k) = \lambda_k v(x_k)$,
   on obtient une deuxième égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1} \lambda_k v(x_k) = 0$.
   On obtient premier résultat en soustrayant la deuxième égalité à λ_{p+1} fois la première.
   • Pour tout $k \in [\![1, p]\!], u(v(x_k)) = v(u(x_k)) = v(\lambda_k v(x_k)) = \lambda_k v(v(x_k))$, d'où $(u - \lambda_k v)(v(x_k)) = 0$.
   Ainsi $\forall k \in [\![1, p]\!], (\lambda_k - \lambda_{p+1})v(x_k) \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_k v)$.
   D'où le résultat car λ_{p+1} est distinct des autres λ_k.

   (b) Or les noyaux sont en somme directe, donc (a) et (b) donnent : $\forall k \in [\![1, p]\!], v(x_k) = 0$.
   De plus, comme $\displaystyle\sum_{k=1}^{p+1} v(x_k) = 0$, on a aussi $v(x_{p+1}) = 0$.
   Pour tout $\forall k[\![1, p]\!], x_k \in \mathrm{Ker}(u - \lambda_k v)$, d'où $u(x_k) = \lambda_k v(x_k) = 0$,
   donc $x_k \in \mathrm{Ker}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$ d'où $x_k = 0$.
   Ainsi les espaces sont en somme directe.
5. Par l'absurde, s'il y a $n + 1$ valeurs propres distinctes $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1}$, alors
   $$\sum_{k=1}^{n+1} \dim(\mathrm{Ker}(u - \lambda_k v)) \geqslant n + 1 \text{ et } \sum_{k=1}^{n+1} \dim(\mathrm{Ker}(u - \lambda_k v)) \leqslant n$$
   Absurde.
6. Comme (u, v) admet un nombre fini de valeurs propres, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Ker}(u - \lambda v) = \{0_E\}$. Donc $\mathrm{Im}(u - \lambda v) = E$. Ainsi
   $$E = \mathrm{Im}(u - \lambda v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) \subset E$$

CHAPITRE

3

PROBABILITÉS

Sujet 3.1

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire définie sur cet espace telle que, pour tout $t > 0$, on a $\mathbb{P}(X > t) \neq 0$.
On note F la fonction de répartition de X.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur le même espace probabilisé, indépendantes et qui suivent toutes la même loi que X.
Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $N_\theta(\omega)$ le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que $X_k(\omega) > \theta$.

On admet que N_θ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On définit enfin la variables aléatoire R_θ par, pour tout $\omega \in \Omega$ et $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{si } N_\theta(\omega) = k \text{ alors } R_\theta(\omega) = X_k(\omega)$$

On admet que R_θ est bien une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Reconnaître la loi de N_θ et en déduire $\mathbb{E}(N_\theta)$.
2. Soit $x > \theta$.
   (a) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
   $$\mathbb{P}\left([N_\theta = k] \cap [R_\theta \leqslant x]\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i \leqslant \theta]\right) \cap [\theta < X_k \leqslant x]\right)$$
   (b) En déduire que $\mathbb{P}(R_\theta \leqslant x) = \dfrac{F(x) - F(\theta)}{1 - F(\theta)} = 1 - \dfrac{1 - F(x)}{1 - F(\theta)}$.
3. Que vaut $\mathbb{P}(R_\theta \leqslant x)$ si $x \leqslant \theta$?
   Prouver que si X est à densité alors R_θ est une variable aléatoire à densité.
4. Dans cette question, on suppose qu'une densité de X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \dfrac{1}{\pi(x^2+1)}$.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F de X.
   (b) Montrer que $1 - F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\pi x}$.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit S_n une variable aléatoire de même loi que R_θ lorsque $\theta = n$.
   Soit Y une variable aléatoire qui admet une densité donnée par $f_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ \frac{1}{x^2} & \text{sinon .} \end{cases}$
   Montrer que $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers Y.

Sujet 3.1 au format de l'année 2025

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit X une variable aléatoire définie sur cet espace telle que, pour tout $t > 0$, on a $\mathbb{P}(X > t) \neq 0$.
On note F la fonction de répartition de X.
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires sur le même espace probabilisé, indépendantes et qui suivent toutes la même loi que X.
Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on note $N_\theta(\omega)$ le plus petit entier $k \geqslant 1$ tel que $X_k(\omega) > \theta$.

On admet que N_θ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Reconnaître la loi de N_θ.
2. Soit $x > \theta$. On définit la variables aléatoire R_θ par, pour tout $\omega \in \Omega$ et $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\text{si } N_\theta(\omega) = k \text{ alors } R_\theta(\omega) = X_k(\omega)$$

On admet que R_θ est bien une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

   (a) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}\left([N_\theta = k] \cap [R_\theta \leqslant x]\right) = \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i \leqslant \theta]\right) \cap [\theta < X_k \leqslant x]\right)$$

   (b) Exprimer $\mathbb{P}(R_\theta \leqslant x)$ en fonction de F.

   (c) Que vaut $\mathbb{P}(R_\theta \leqslant x)$ si $x \leqslant \theta$?

3. Dans cette question, on suppose qu'une densité de X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \dfrac{1}{\pi(x^2+1)}$.
Montrer que $\left(\dfrac{R_n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable à densité dont on précisera une densité.

Solution du sujet 3.1

1. Comme N_θ est le rang d'apparition k du premier succès ($X_k > \theta$), que les succès sont indépendants car les X_k le sont, et de même probabilité $1 - F(\theta)$, on reconnaît que $N_\theta \hookrightarrow \mathcal{G}(1 - F(\theta))$.

   Donc $\mathbb{E}(N_\theta) = \dfrac{1}{1 - F(\theta)}$ (NB : on a bien $0 < 1 - F(\theta)$ par hypothèse).

2. (a) $[R_\theta \leqslant x]$ et $[N_\theta = k]$ sont réalisés si et seulement si pour tout $i \in [\![1, k-1]\!]$, $[X_i \leqslant \theta]$ est réalisé, ainsi que $[X_k > \theta]$ et $[X_k \leqslant x]$ puisqu'alors $R_\theta = X_k$. Donc

$$[R_\theta \leqslant x] \cap [N_\theta = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i \leqslant \theta]\right) \cap [\theta < X_k \leqslant x]$$

   d'où l'égalité des probabilités.

   (b) Appliquons la formule des probabilités totales avec le système complet $([N_\theta = k])_{k \geqslant 1}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(R_\theta \leqslant x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left([R_\theta \leqslant x] \cap [N_\theta = k]\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} [X_i \leqslant \theta]\right) \cap [\theta < X_k \leqslant x]\right) \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(X_i \leqslant \theta)\right) \mathbb{P}(\theta < X_k \leqslant x) && \text{par indépendance} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} (F(\theta))^{k-1} (F(x) - F(\theta)) = (F(x) - F(\theta)) \sum_{k=1}^{+\infty} (F(\theta))^{k-1} \\
&= \frac{F(x) - F(\theta)}{1 - F(\theta)} = \frac{F(x) - 1 + 1 - F(\theta)}{1 - F(\theta)} = 1 - \frac{1 - F(x)}{1 - F(\theta)}.
\end{aligned}$$

3. La variable R_θ est à valeurs dans $]\theta, +\infty[$, d'où si $x \leqslant \theta$, $P(R_\theta \leqslant x) = 0$.
   La question précédente montre donc que si F est continue sur $\mathbb{R}$ de classe C^1 sauf en un nombre fini de points, alors $x \mapsto \mathbb{P}(R_\theta \leqslant x)$ (continue y compris en θ).

4. (a) Un calcul rapide montre que pour tout x réel, $F(x) = \dfrac{1}{\pi}\left(\arctan(x) + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

   (b) Classiquement pour $x > 0$, $\arctan x + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}$.
   D'où $1 - F(x) = \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) = \dfrac{1}{\pi}\arctan(1/x)$, et $\arctan(u) \sim u$ en 0 d'où le résultat.

   (c) La fonction de répartition de Y est donnée par $F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & \text{sinon} \end{cases}$.

   Si $x \leqslant 1$, on a $\mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \leqslant x\right) = \mathbb{P}(S_n \leqslant nx) = 0 = F_Y(x)$.

   Si $x > 1$, on a $\mathbb{P}\left(\dfrac{S_n}{n} \leqslant x\right) = \mathbb{P}(S_n \leqslant nx) = 1 - \dfrac{1 - F(nx)}{1 - F(n)} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\frac{1}{\pi n x}}{\frac{1}{\pi n}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 - 1/x = F_Y(x)$.

SUJET 3.2 On considère une urne qui contient trois boules : une blanche, une noire et une rouge.
On effectue des tirages au hasard successifs d'une boule avec remise dans cette urne.
Cette expérience aléatoire est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires de l'exercice.

On note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage où pour la première fois on a obtenu une boule blanche et on note Y le numéro du tirage où pour la première fois on a obtenu une boule noire.
On note également $U = |X - Y|$ et $W = \min(X, Y)$.

1. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Que représente W ? En déduire la loi W.
4. Compléter la fonction `Python` suivante pour qu'elle simule le couple (X, Y) :

```python
import numpy.random as rd
def simul():
n,X,Y=1,0,0
while X==0 or Y==0:
          b=rd.randint(1,4) #1:blanc ; 2:noir ; 3:rouge
   if b==1 and X==0:
      X=____
   if ______:
      Y= _______
   n=n+1
return (X,Y)
```

5. Que représente la variable aléatoire $U + W$ par rapport à X et Y ?
   En déduire une relation simple entre U, W, X et Y, puis l'espérance de U.
6. Dans cette question, *on admet* que quel que soit $k \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de U sachant $(W = k)$ est la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$.
   Que peut-on en déduire sur les deux variables U et W ? En déduire la loi de U.
7. Justifier l'affirmation de la question **6**, à savoir que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de U sachant $(W = k)$ est la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$.

Sujet 3.2 au format de l'année 2025

On considère une urne qui contient trois boules : une blanche, une noire et une rouge.
On effectue des tirages au hasard successifs d'une boule avec remise dans cette urne.

On note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage où pour la première fois on a obtenu une boule blanche et on note Y le numéro du tirage où pour la première fois on a obtenu une boule noire.

1. (a) Déterminer la loi de X et celle de Y.
   (b) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
   (c) On pose $W = \min(X, Y)$. Que représente W ? Déterminer la loi de W.
2. Compléter la fonction `Python` suivante pour qu'elle simule le couple (X, Y) :

```
import numpy.random as rd
def simul():
n,X,Y=1,0,0
while X==0 or Y==0:
            b=rd.randint(1,4) #1:blanc ; 2:noir ; 3:rouge
    if b==1 and X==0:
        X=____
    if ______:
        Y= _______
    n=n+1
return (X,Y)
```

3. On pose $U = |X - Y|$.
   (a) Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de U sachant $(W = k)$ est la loi géométrique de paramètre $\dfrac{1}{3}$.
   (b) Que peut-on en déduire sur les deux variables U et W ? En déduire la loi de U.

Solution du sujet 3.2

1. La variable $\boxed{X \text{ est le rang du premier succès « tirer un boule blanche »,}}$ de probabilité $\frac{1}{3}$ lors de tirages indépendants (avec remise). Donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right),}$ et d'après le cours : $\boxed{E(X) = 3 \text{ et } V(X) = 6.}$

2. De même Y suit aussi la loi $\mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$. Alors $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes}}$ car :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P\big((X=k)\cap(Y=k)\big) = 0 \neq \left(\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{2}{3}\right)^{k-1}\right)^2 = P(X=k)\times P(Y=k).$$

3. La variable $\boxed{W \text{ est le rang du premier succès « tirer une boule blanche ou noire »,}}$ donc $\boxed{W \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{2}{3}\right).}$

4. *Remarque :* `rd.randint(1,4)` est à valeur dans $[\![1,3]\!]$ (alors que `random.randint(1,4)` est dans $[\![1,4]\!]$).

```
        if b==1 and X==0:
            X=n
        if b==2 and Y==0:
            Y=n
```

5. La variable $U+W$ représente le maximum de X et de Y $\boxed{U+W = \max(X,Y)}$; en effet :
   - si $X(\omega) < Y(\omega)$, $U(\omega)+W(\omega) = X(\omega)+Y(\omega)-X(\omega) = Y(\omega)$
   - si $X(\omega) \geqslant Y(\omega)$, $U(\omega)+W(\omega) = Y(\omega)+X(\omega)-Y(\omega) = X(\omega)$.

   Par conséquent, $X+Y = \max(X,Y)+\min(X,Y) = (U+W)+W$, soit $\boxed{X+Y = U+2W.}$ D'où :

$$E(U) = E(X+Y-2W) = E(X)+E(Y)-2E(W) = 3+3-2\times\frac{3}{2} = \boxed{3.}$$

6. $\boxed{\text{Les variables } U \text{ et } W \text{ sont indépendantes et } U \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)}$ car par la f. des probabilités totales avec le SCE $(W=k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, pour tout $k_0, \ell \in \mathbb{N}^*$, puisque $P(U=\ell|W=k) = P(U=\ell|W=k_0)$, on a :

$$P(U=\ell) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(U=\ell|W=k)P(W=k) = P(U=\ell|W=k_0)\sum_{k=1}^{+\infty} P(W=k) = P(U=\ell|W=k_0),$$

7. Notons R_k (resp. B_k, N_k) l'évènement « le k-ième tirage donne une boule rouge (resp. blanche, noire) ».
   La loi du couple (X,Y) est donnée par $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, pour tout $i,j\in\mathbb{N}^*$, par :
   - Si $i=j$: $P\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = 0$.
   - Si $i<j$, par indépendance des tirages :

$$P\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = P\left(\left(\bigcap_{k=1}^{i-1} R_k\right)\cap B_i \cap \left(\bigcap_{k=i+1}^{j-1} \overline{N}_k\right)\cap N_j\right)$$

$$= \prod_{k=1}^{i-1} P(R_k)\times P(B_i)\times \prod_{k=i+1}^{j-1} P\left(\overline{N}_k\right)\times P(N_j) = \frac{1}{3^{i-1}}\times\frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^{j-i-1}\times\frac{1}{3} = \frac{2^{j-i-1}}{3^j}.$$

   - Si $i>j$: $P\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = \dfrac{2^{i-j-1}}{3^i}$ (de même que dans le cas précédent)

   Donc, pour tout $i\in\mathbb{N}^*$ et $k\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$P_{(W=k)}(U=i) = \frac{P(X=k\cap Y=k+i)+P(Y=k\cap X=k+i)}{P(W=k)} = \frac{2\times\dfrac{2^{i-1}}{3^{i+k}}}{\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^i = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{i-1}$$

SUJET 3.3 On considère une variable aléatoire X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui suit la loi de POISSON de paramètre $\lambda > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon indépendant et de même loi que celle de X.

On pose $Y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\overline{X}_n = \dfrac{Y_n}{n}$.

1. (a) Quelle est la loi, l'espérance et la variance de la variable aléatoire Y_n ?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\overline{X}_n$.
   (c) Démontrer que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais convergent de λ.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Soit $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $k_1 + \cdots + k_n \neq k$.
   Déterminer la probabilité conditionnelle : $P_{[Y_n=k]}([X_1 = k_1] \cap \cdots \cap [X_n = k_n])$.
   (b) Déterminer la loi conditionnelle du vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$ sachant l'événement $[Y_n = k]$.
3. On pose : $T_n = \sqrt{n}\dfrac{\overline{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$.
   (a) Justifier que la suite de variables aléatoires (T_n) converge en loi vers une variable aléatoire T dont on précisera la loi.
   (b) On admet que n est suffisamment grand pour approcher la loi de T_n par celle de T. Soit $\alpha \in]0, 1[$. On désigne par Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et par t_α un réel vérifiant $\Phi(t_\alpha) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$. Déterminer en fonction de t_α un intervalle de confiance de λ au risque α.

Sujet 3.3 au format de l'année 2025

On considère une variable aléatoire X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon indépendant et de même loi que celle de X.

On pose $Y_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $\overline{X}_n = \dfrac{Y_n}{n}$.

1. Démontrer que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais convergent de λ.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$.
   (a) Soit $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $k_1 + \cdots + k_n \neq k$.
   Déterminer la probabilité conditionnelle : $P_{[Y_n=k]}([X_1 = k_1] \cap \cdots \cap [X_n = k_n])$.
   (b) Déterminer la loi conditionnelle du vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$ sachant l'événement $[Y_n = k]$.
3. On pose : $T_n = \sqrt{n}\dfrac{\overline{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$. Soit $\alpha \in]0, 1[$. En utilisant T_n, déterminer un intervalle de confiance de λ au risque α.

Solution du sujet 3.3

1. (a) Comme $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, par stabilité des lois de Poisson, $Y_n \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)$.
D'où $E(Y_n) = V(Y_n) = n\lambda$.

   (b) D'après la question précédente on a : $\mathbb{E}\big(\overline{X}_n\big) = \dfrac{1}{n}\mathbb{E}(Y_n) = \lambda$ et $\mathbb{V}\big(\overline{X}_n\big) = \dfrac{1}{n^2}\mathbb{V}(Y_n) = \dfrac{\lambda}{n}$.

   (c) • D'abord $\overline{X}_n$ est un estimateur de λ comme fonction indépendante de λ d'un n-échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

   • On a $\mathbb{E}(\overline{X}_n) = \dfrac{1}{n}\mathbb{E}(Y_n) = \lambda$ donc $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais de λ.

   • $\mathbb{V}(\overline{X}_n) = \dfrac{1}{n^2}\mathbb{V}(Y_n) = \dfrac{\lambda}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais convergent de λ.

2. (a) On a : $\mathbb{P}_{[Y_n=k]}([X_1 = k_1] \cap \cdots \cap [X_n = k_n]) = \dfrac{\mathbb{P}([Y_n = k] \cap [X_1 = k_1] \cap \cdots \cap [X_n = k_n])}{\mathbb{P}(Y_n = k)}$.
Mais $\mathbb{P}([Y_n = k] \cap [X_1 = k_1] \cap \cdots \cap [X_n = k_n]) = 0$ donc la probabilité conditionnelle cherchée est nulle.

   (b) Fixons $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$. La loi conditionnelle du vecteur aléatoire $(X_1, \dots, X_n)$ sachant l'événement $[Y_n = k]$ est donnée par

   - Si $k_1 + \cdots + k_n \neq k$ alors $\mathbb{P}_{[Y_n=k]}([X_1 = k_1] \cap \cdots \cap [X_n = k_n]) = 0$.
   - Si $k_1 + \cdots + k_n = k$, alors : $[[Y_n = k] \cap [X_1 = k_1] \cap \cdots \cap [X_n = k_n]] = [[X_1 = k_1] \cap \cdots \cap [X_n = k_n]]$.
Par indépendance des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[Y_n=k]}([X_1 = k_1] \cap \cdots \cap [X_n = k_n]) &= \frac{1}{P(Y_n = k)} \prod_{i=1}^{n} P(X_i = k_i) = \frac{k!}{(n\lambda)^k \mathrm{e}^{-n\lambda}} \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{k_i}\mathrm{e}^{-\lambda}}{k_i!} \\ &= \frac{k!}{(n\lambda)^k \mathrm{e}^{-n\lambda}} \times \frac{\lambda^{k_1+\cdots+k_n}\mathrm{e}^{-n\lambda}}{k_1! \cdots k_n!} = \frac{k!}{n^k k_1! \cdots k_n!}\end{aligned}$$

3. (a) La variable centrée réduite associée à $\overline{X}_n$ est T_n.
Les conditions d'utilisation du théorème de la limite centrée sont vérifiées (suite de variables aléatoires indépendantes de même loi qui admet un moment d'ordre 2) : T_n converge en loi vers T où T est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

   (b) On a $\mathbb{P}(-t_\alpha \leqslant T_n \leqslant t_\alpha) = \Phi(t_\alpha) - \Phi(-t_\alpha) = 2\Phi(t_\alpha) - 1 = 1 - \alpha$. Et par ailleurs :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(-t_\alpha \leqslant T_n \leqslant t_\alpha) &= \mathbb{P}\left(-t_\alpha \leqslant \sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leqslant t_\alpha\right) = \mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - \lambda| \leqslant \frac{\sqrt{\lambda}\, t_\alpha}{\sqrt{n}}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\big(\overline{X}_n - \lambda\big)^2 \leqslant \frac{\lambda\, t_\alpha^2}{n}\right) = P\left(\lambda^2 - 2\left(\overline{X}_n + \frac{t_\alpha^2}{n}\right)\lambda + \overline{X}_n^2 \leqslant 0\right)\end{aligned}$$

Le discriminant du trinôme en λ est : $\Delta'_n = 4\left(\overline{X}_n + \dfrac{t_\alpha^2}{n}\right)^2 - 4\overline{X}_n^2 = \dfrac{4t_\alpha^2}{n}\left(2\overline{X}_n + \dfrac{t_\alpha^2}{n}\right) > 0$.
Ainsi $\mathbb{P}(-t_\alpha \leqslant T_n \leqslant t_\alpha) = \mathbb{P}(\alpha_n \leqslant \lambda \leqslant \beta_n)$ où :

$$\alpha_n = \left(\overline{X}_n + \frac{t_\alpha^2}{n}\right) - \sqrt{\Delta'_n} \qquad \text{et} \qquad \beta_n = \left(\overline{X}_n + \frac{t_\alpha^2}{n}\right) + \sqrt{\Delta'_n}.$$

Un intervalle de confiance au risque $1 - \alpha$ est donc $[\alpha_n, \beta_n]$.

SUJET 3.4 Soient $m, p \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) Soit la fonction suivante, écrite en Python :

```
from numpy.random import*
def va(m,p):
    N=randint(1,m+1)  #randint(1,m+1) renvoie un entier pris au hasard
                                              #entre 1 et m inclus.
    X=0
    for i in range(N):
        X=X+randint(0,p+1)
    return N,X
```

On exécute `va(10,1)`, cette fonction renvoie deux valeurs `N,X`.
Sachant que `N` vaut `8`, quelles sont les valeurs possibles de `X` ?

(b) Expliquer ce que fait le script suivant :

```
c=1
while va(10,1)!=va(10,1):
    c+=1
print(c)
```

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.
Soit (N, X) un couple aléatoire sur cet espace dont la valeur est simulée par la fonction `va`.

2. (a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire N ?
Préciser, si elles existent, les valeurs de son espérance et de sa variance.

(b) Dans les cas particulier où $m = p = 1$, quelle est la loi de la variable aléatoire X ?

On se place désormais dans le cas particulier où $p = 1$.

3. (a) Pour tout $k \in [\![1, m]\!]$, justifier que la loi de X conditionnellement à l'événement $[N = k]$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(k, \frac{1}{2})$.

(b) Déterminer la loi de X.

(c) Calculer l'espérance de X.

4. En considérant la fonction f définie par $f(x) = (\mathrm{e}^x + 1)^k$,
établir que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 \binom{k}{i} = k(k+1)2^{k-2}$$

5. Construire à partir de N (vu comme un 1-échantillon) un estimateur sans biais de m.
Faire de même à partir de X.
Comparer les variances de ces deux estimateurs.

Sujet 3.4 au format de l'année 2025

Soient $m, p \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) Soit la fonction suivante, écrite en Python :

```
from numpy.random import*
def va(m,p):
    N=randint(1,m+1)  #randint(1,m+1) renvoie un entier pris au hasard
                                                #entre 1 et m inclus.
    X=0
    for i in range(N):
        X=X+randint(0,p+1)
    return N,X
```

On exécute `va(10,1)`, cette fonction renvoie deux valeurs `N,X`.
Sachant que `N` vaut `8`, quelles sont les valeurs possibles de `X` ?

(b) Expliquer ce que fait le script suivant :

```
    c=1
    while va(10,1)!=va(10,1):
        c+=1
    print(c)

```

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit (N, X) un couple aléatoire sur cet espace dont la valeur est simulée par la fonction `va`.

2. (a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire N ?

(b) Dans les cas particulier où $m = p = 1$, quelle est la loi de la variable aléatoire X ?

On se place désormais dans le cas particulier où $p = 1$.

3. (a) Déterminer la loi de X.

(b) Construire à partir de N un estimateur sans biais de m.
Faire de même à partir de X.
Lequel de ces deux estimateurs est-il le meilleur ?

Solution du sujet 3.4

1. (a) Comme `randint(0,2)` renvoie 0 ou 1, X prend ses valeurs dans $\boxed{[\![0,8]\!].}$
   (b) Il simule deux valeurs du couple (N,X) jusqu'à obtention de deux couples identiques.
   Les valeurs possibles affichées sont les entiers $c \in \mathbb{N}^*$.
2. (a) La variable N suit la loi $\mathcal{U}([\![1,m]\!])$. Donc $E(N) = \frac{m+1}{2}$, $V(N) = \frac{m^2-1}{12}$.
   (b) Cas particulier $m = p = 1$: X suit une loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.
3. (a) Sachant $(N = k)$, X est la somme de j variables indépendantes de loi $\mathcal{B}(1/2)$, donc $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}(j, \frac{1}{2}).}$
   (b) On utilise le système complet d'événements $[N = k]_{1 \leqslant k \leqslant m}$ et la formule des probabilités totales :
   Pour $i \in [\![0,m]\!], P(X = i) = \displaystyle\sum_{k=1}^{m} P(X = i \backslash N = k)P(N = k) = \frac{1}{m}\sum_{k=i}^{m}\binom{k}{i}(\frac{1}{2})^k$
   (c) On utilise la formule de l'espérance totale avec le système complet d'événements $[N = k]_{1 \leqslant k \leqslant m}$:
$$E(X) = \sum_{k=1}^{m} E(X|N = k)P(N = k) = \sum_{k=1}^{m}\frac{k}{2}\times\frac{1}{m} = \boxed{\frac{m+1}{4}.}$$
4. Comme $f(x) = (e^x+1)^k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\mathrm{e}^{jx}$, on a d'une part : $f^{''}(0) = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} j^2\binom{k}{j}$, et d'autre part :
   $f^{''}(x) = k(k-1)(e^x+1)^{k-2}e^{2x} + k(e^x+1)^{k-1}e^x$ d'où $f^{''}(0) = 2^{k-2}[k(k-1)+2k] = 2^{k-2}k(k+1)$.
   Autre idée (sans utiliser f) : $\frac{1}{2^k}\displaystyle\sum_{j=1}^{k} j^2\binom{k}{j} = E(T^2) = V(T) + E(T)^2$, avec T qui suit la loi $\mathcal{B}(k, \frac{1}{2})$.
5. Comme $E(N) = \frac{m+1}{2}$ on choisit : $\boxed{N^{'} = 2N-1}$ estimateurs sans biais de m.
   Alors $V(N) = \frac{(m+1)(m-1)}{12}$ d'où $\boxed{V(N^{'}) = 4V(N) = \frac{(m+1)(m-1)}{3}.}$

   Comme $E(X) = \frac{m+1}{4}$ on choisit : $\boxed{X^{'} = 4X-1}$ estimateurs sans biais de m. Calculons $V(X^{'})$.
   Par la formule de l'espérance totale avec le système complet d'événements $[N = k]_{1 \leqslant k \leqslant m}$:
$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{k=1}^{m} E(X^2|N = k)P(N = k) = \sum_{k=1}^{m}\big(V(X|N = k) + E(X|N = k)^2\big)\times\frac{1}{m} \\ &= \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}(\frac{k}{4}+\frac{k^2}{4}) = \frac{1}{4m}\left[\frac{m(m+1)}{2} + \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}\right] = \frac{1}{12}(m+1)(m+2). \end{aligned}$$
   Autre méthode calcul de $E(X^2)$:
$$\begin{aligned} E(X^2) &= \sum_{i=1}^{m} i^2\frac{1}{m}\sum_{k=i}^{m}\binom{k}{i}(\frac{1}{2})^k = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{k} i^2\binom{k}{i}(\frac{1}{2})^k \\ &= \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}(\frac{1}{2})^k\sum_{i=1}^{k} i^2\binom{k}{i} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}(\frac{1}{2})^k k(k+1)2^{k-2} \text{ en utilisant la question précédente} \\ &= \frac{1}{4m}\sum_{k=1}^{m} k(k+1) = \frac{1}{12}(m+1)(m+2) \end{aligned}$$
   D'où $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{(m+1)(m+2)}{12} - \frac{(m+1)^2}{16} = \frac{(m+1)(m+5)}{48}$
   et $V(X^{'}) = 16V(X) = \boxed{\frac{(m+1)(m+5)}{3}.}$
   On a pour tout $m \geqslant 1$, $\boxed{V(X^{'}) > V(N^{'}).}$

SUJET 3.5 Soit un r entier strictement positif. on considère r urnes numérotées de 1 à r qui contiennent chacune r boules. Pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, l'urne numéro j contient exactement j boules rouges et $r - j$ boules d'une autre couleur.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit une urne au hasard et on effectue dans cette urne n tirages au hasard d'une boule avec remise. On note X_r la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules rouges tirées lors de ces n tirages.

Pour $j \in [\![1, r]\!]$, on note U_j l'événement « le numéro de l'urne choisie au hasard est j ».

1. Soit $j \in [\![1, r]\!]$. Quelle est la loi conditionnelle de X_r sachant U_j ?
2. Déterminer la loi de probabilité de X_r *(on exprimera les diverses probabilités sous forme de sommes).*
3. Calculer $\mathbb{E}(X_r)$.
4. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note f_k la fonction définie par : $f_k(x) = x^k(1-x)^{n-k}$. On pose $I_k = \displaystyle\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x$.
   (a) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x$. On la note I_k.
   (b) Déterminer l'expression de I_k en fonction de k.
   (c) Montrer que la suite $(X_r)_{r \geqslant 0}$ converge en loi vers une variable X à déterminer.
5. Montrer $\displaystyle\lim_{r \to +\infty} \mathbb{E}(X_r) = \mathbb{E}(X)$.
   À t-on, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{r \to +\infty} \mathbb{E}(f(X_r)) = \mathbb{E}(f(X))$?

Sujet 3.5 au format de l'année 2025

Soit un r entier strictement positif. on considère r urnes numérotées de 1 à r qui contiennent chacune r boules. Pour tout $j \in [\![1, r]\!]$, l'urne numéro j contient exactement j boules rouges et $r - j$ boules d'une autre couleur.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit une urne au hasard et on effectue dans cette urne n tirages au hasard d'une boule avec remise. On note X_r la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules rouges tirées lors de ces n tirages.

Pour $j \in [\![1, r]\!]$, on note U_j l'événement « le numéro de l'urne choisie au hasard est j ».

1. (a) Déterminer la loi de probabilité de X_r.
2. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note f_k la fonction définie par : $f_k(x) = x^k(1-x)^{n-k}$. On pose $I_k = \displaystyle\int_0^1 f_k(x)\mathrm{d}x$.
   (a) Déterminer l'expression de I_k en fonction de k.
   (b) Montrer que la suite $(X_r)_{r \geqslant 0}$ converge en loi vers une variable X à déterminer.
3. Calculer $\mathbb{E}(X_r)$.
   A-t-on, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lim\limits_{r \to +\infty} \mathbb{E}(f(X_r)) = \mathbb{E}(f(X))$?

Solution du sujet 3.5

1. On reconnaît que la loi conditionnelle demandée est binomiale de paramètres n et $\frac{j}{r}$ *i.e.*

$$X_r(\Omega) = [\![0, n]\!] \text{ et } \mathbb{P}(X_r = k|U_j) = \binom{k}{n}\big(\frac{j}{r}\big)^k\big(1-\frac{j}{r}\big)^{n-k}$$

2. Par la formule des probabilités totales avec le SCE $(U_j)_{1\leqslant j\leqslant r}$, on a :

$$\mathbb{P}(X_r = k) = \sum_{j=1}^{r}\mathbb{P}(X_r = k|U_j)\underbrace{P(U_j)}_{=\frac{1}{r}} = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}\binom{n}{k}\big(\frac{j}{r}\big)^k\big(1-\frac{j}{r}\big)^{n-k}.$$

3. On peut écrire

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_r) &= \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X_r = k) = \sum_{k=0}^{n}\frac{k}{r}\sum_{j=1}^{r}\binom{n}{k}\big(\frac{j}{r}\big)^k\big(1-\frac{j}{r}\big)^{n-k} = \sum_{j=1}^{r}\frac{1}{r}\Big(\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}\big(\frac{j}{r}\big)^k\big(1-\frac{j}{r}\big)^{n-k}\Big)\\ &= \sum_{j=1}^{r}\frac{1}{r}\big(n\frac{j}{r}\big) \text{ on reconnaît l'espérance d'une va } Y \text{ de loi binomiale de paramètres } \big(n, \frac{j}{r}\big)\\ &= \frac{n}{r^2}\sum_{j=1}^{r} j = \frac{n}{2}\frac{r+1}{r}\end{aligned}$$

On peut également utiliser la formule de l'espérance totale : $\mathbb{E}(X_r) = \displaystyle\sum_{j=1}^{r}\mathbb{E}(X_r|U_j)\mathbb{P}(U_j) = \sum_{j=1}^{r}\frac{nj}{r}\frac{1}{r}$

4. (a) La fonction f_k est une fonction polynomiale donc continue sur $[0, 1]$ d'où l'existence de I_k.

   (b) Par intégration par parties, on obtient $(k+1)I_k = (n-k)I_{k+1}$.
   D'où : $I_k = \frac{k!}{(n-k+1)\cdots n}I_0 = \frac{1}{\binom{n}{k}(n+1)}$

   (c) D'après le théorème sur les sommes de Riemann, on a :

$$\mathbb{P}(X_r = k) = \binom{n}{k}\times\frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r}f_k\left(\frac{j}{r}\right)\underset{r\to+\infty}{\longrightarrow}\binom{n}{k}\int_0^1 f_k(t)dt = \binom{n}{k}\frac{1}{\binom{n}{k}(n+1)} = \frac{1}{n+1}.$$

   La suite $(X_r)_{r\geqslant 0}$ converge donc en loi vers une variable X de loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$.

5. On a déjà calculé $\mathbb{E}(X_r) = \frac{n}{2}\frac{r+1}{r}$ et on a bien $\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\mathbb{E}(X_r) = \frac{n}{2} = \mathbb{E}(X)$
   Plus généralement, pour toute fonction $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, l'univers des X_r étant fini, on a, par le théorème de transfert, lorsque $r\to+\infty$

$$\mathbb{E}(f(X_r)) = \sum_{k=0}^{n}f(k)\mathbb{P}(X_r = k)\underset{r\to+\infty}{\to}\sum_{k=0}^{n}f(k)\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(f(X))$$

CHAPITRE

4

OPTION B/L

Sujet 4.1

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On note id_E l'application identité de E.

1. Soit p un projecteur de E, c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.
   (a) Dans quel(s) cas l'endomorphisme p est-il bijectif ?
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$.
   (c) Déterminer les valeurs propres de p.
2. Soit p et q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$.
   On pose $f = p + q$ et $g = p \circ q$.
   (a) Le réel -1 est-il une valeur propre de f ? Justifier.
   (b) Montrer que g est un projecteur de E.
   (c) Déterminer $f^3 - 3f^2 + 2f$.
   (d) Déterminer les valeurs propres possibles de f.
   (e) Montrer que 0 est valeur propre de f si et seulement si $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \neq \{0_E\}$.
   (f) Montrer que 2 est valeur propre de f si et seulement si $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \neq \{0_E\}$.

Sujet 4.1 au format de l'année 2025

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On note id_E l'application identité de E.

1. Soit p un projecteur de E, c'est-à-dire un endomorphisme de E tel que $p \circ p = p$.
   (a) Montrer que $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$.
   (b) Déterminer les valeurs propres de p.
2. Soit p et q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$. On pose $f = p + q$.
   (a) Déterminer $f^3 - 3f^2 + 2f$.
   (b) En déduire les valeurs propres possibles de f.
3. (a) Montrer que 0 est valeur propre de f si et seulement si $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \neq \{0_E\}$.
   (b) Montrer que 2 est valeur propre de f si et seulement si $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \neq \{0_E\}$.
   (c) Le réel -1 est-il une valeur propre de f ?

Solution du sujet 4.1

1. (a) Le seul projecteur bijectif est l'identité. On demandera au candidat de le redémontrer.
   (b) Cette question est classique. Le candidat doit cependant la redémontrer car elle ne figure pas au programme officiel.
   (c) Si p est l'identité, sa seule valeur propre est 1. Si p est l'endomorphisme nul, sa seule valeur propre est 0. Dans tous les autres cas, les valeurs propres de p sont 0 et 1 car $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p - id)$. Une autre possibilité est d'introduire le polynôme annulateur $X^2 - X$.
2. (a) Raisonnons par l'absurde et supposons que -1 est valeur propre de f. Alors, il existe un vecteur $x \in E$ tel que $x \neq 0_E$ et $f(x) = -x$. Comme $f = p + q$, on obtient
$$p(x) + q(x) = -x \qquad (\star).$$
   En composant par p, obtient $(p \circ q)(x) = -2p(x)$.
   De même, en composant $(\star)$ par q, on obtient $(q \circ p)(x) = -2q(x)$.
   Comme $p \circ q = q \circ p$, on en déduit que $p(x) = q(x)$. D'où, $p(x) = \dfrac{-1}{2}x$. Comme $x \neq 0_E$, cette égalité signifie que $\dfrac{-1}{2}$ est valeur propre du projecteur p. On aboutit à une contradiction.
   (b) g est un endomorphisme de E et $g \circ g = g$.
   (c) Comme p et q commutent, on peut utiliser la formule du binôme.
   Le calcul donne $f^3 - 3f^2 + 2f = (p + 6pq + q) - 3(p + 2pq + q) + 2(p + q) = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
   (d) Le polynôme $P(X) = X^3 - X^2 + 2X = X(X-1)(X-2)$ est annulateur de f.
   On montre alors (résultat hors programme) que les valeurs propres possibles pour f sont $0, 1, 2$.
   (e) $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que 0 est valeur propre de f. Alors il existe $x \neq 0_E$ tel que $f(x) = 0_E$.
   Comme $f = p + q$, on obtient
$$p(x) + q(x) = 0_E \qquad (\star).$$
   En appliquant p à $(\star)$, on obtient $(p \circ q)(x) = -p(x)$. En appliquant q à $(\star)$, on obtient $(q \circ p)(x) = -q(x)$. Comme $p \circ q = q \circ p$, on en déduit que $p(x) = q(x)$. En reportant dans $(\star)$, $p(x) = 0_E$ et $q(x) = 0_E$. D'où $x \in \mathrm{Ker}(p)$ et $x \in \mathrm{Ker}(q)$.
   $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) \neq \{0_E\}$. Il existe alors $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Ker}(q) - \{0_E\}$. Alors $p(x) = 0_E$ et $q(x) = 0_E$. Par somme, on a $f(x) = 0_E$ et 0 est valeur propre de f.

   (f) $\boxed{\Longrightarrow}$ Supposons que 2 est valeur propre de f. Alors il existe $x \in E - \{0_E\}$ tel que $f(x) = 2x$. Ainsi,
$$p(x) + q(x) = f(x) = 2x \qquad (\star).$$
   En composant par p, on obtient
$$p(x) + (p \circ q)(x) = 2p(x).$$
   D'où
$$(p \circ q)(x) = p(x).$$
   De même, en appliquant q à $(\star)$, on obtient $(q \circ p)(x) = q(x)$. Comme $p \circ q = q \circ p$,
$$p(x) = (p \circ q)(x) = (q \circ p)(x) = q(x).$$
   On en déduit $p(x) = x$ et $q(x) = x$. Ainsi $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$. Or $x \neq 0_E$. Donc $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \neq \{0_E\}$.
   $\boxed{\Longleftarrow}$ Supposons $\mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q) \neq \{0_E\}$. Alors il existe un vecteur $x \in E$ tel que $x \neq 0_E$ et $x \in \mathrm{Im}(p) \cap \mathrm{Im}(q)$. Comme p et q sont des projecteurs, $\mathrm{Im}(p) = \{u \in E \mid p(u) = u\}$ et $\mathrm{Im}(q) = \{u \in E \mid q(u) = u\}$. Donc, $x = p(x)$ et $x = q(x)$. Donc, $f(x) = p(x) + q(x) = x + x = 2x$. Comme $x \neq 0_E$, on en déduit que 2 est valeur propre de f.

Sujet 4.2

Toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes les trois la loi uniforme discrète sur $[\![1, n]\!]$, avec $n \geqslant 2$.

1. (a) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(X + Y = 2)$ et la probabilité $\mathbb{P}(X + Y = 2n)$.
   (b) Soit $k \in [\![2, 2n]\!]$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(X + Y = k)$.
   On distinguera les cas $k \in [\![2, n+1]\!]$ et $k \in [\![n+2, 2n]\!]$
   (c) Vérifier par le calcul que l'on a bien $\displaystyle\sum_{k=2}^{2n} \mathbb{P}(X + Y = k) = 1$.
2. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X + Y = Z)$.
3. On pose $T = n + 1 - Z$.
   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire T.
   (b) Les variables X, Y et T sont-elles mutuellement indépendantes ? Justifier.
   (c) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(X + Y + Z = n + 1)$.
   (d) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(X + Y + Z = 2n + 2)$.

Sujet 4.2 au format de l'année 2025

Toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.
Soit X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes les trois la loi uniforme discrète sur $[\![1, n]\!]$, avec $n \geqslant 2$.

1. On pose $T = n + 1 - Z$.
   (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire T.
   (b) Les variables X, Y et T sont-elles mutuellement indépendantes ? Justifier.
2. (a) Calculer la probabilité $\mathbb{P}(X + Y = 2)$ et la probabilité $\mathbb{P}(X + Y = 2n)$.
   (b) Soit $k \in [\![2, 2n]\!]$. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(X + Y = k)$.
3. (a) Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X + Y = Z)$.
   (b) Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X + Y + Z = n + 1)$ et $\mathbb{P}(X + Y + Z = 2n + 2)$.

Solution du sujet 4.2

1. (a) Par indépendance de X et Y, $\mathbb{P}(X+Y=2)=\mathbb{P}((X=1)\cap(Y=1))=\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)=\frac{1}{n^2}$.
De même, $\mathbb{P}(X+Y=2n)=\mathbb{P}(X=n)\mathbb{P}(Y=n)=\frac{1}{n^2}$.

   (b) On a $(X+Y)(\Omega)\subset[\![2,2n]\!]$ et d'après formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X=i)_{i\in[\![1,n]\!]}$, et par indépendance de X et Y, pour tout $k\in[\![2,2n]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}(X+Y=k)=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}([X+Y=k]\cap[X=i])=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}([Y=k-i]\cap[X=i])=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(Y=k-i)\mathbb{P}(X=i).$$

Or : $1\leqslant k-i\leqslant n\iff k-n\leqslant i\leqslant k-1$, donc en enlevant les termes nuls :

$$\mathbb{P}(X+Y=k)=\sum_{i\in[\![1,n]\!]\cap[\![k-n,k-1]\!]}\frac{1}{n^2}=\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{n^2}=\frac{k-1}{n^2} & \text{si } 2\leqslant k\leqslant n+1\\ \displaystyle\sum_{i=k-n}^{n}\frac{1}{n^2}=\frac{2n-k+1}{n^2} & \text{si } n+2\leqslant k\leqslant 2n\end{cases}$$

   (c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{2n}\mathbb{P}(X+Y=k)=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{k-1}{n^2}+\sum_{k=n+2}^{2n}\frac{2n-k+1}{n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n-1}i=1.$

2. La formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(Z=k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X+Y=Z)&=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}([X+Y=Z]\cap[Z=k])=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}([X+Y=k]\cap[Z=k])\\&=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X+Y=k)\mathbb{P}(Z=k)\qquad\text{(indép. de } Z \text{ et } X+Y \text{ par lemme des coalitions)}\\&=\sum_{k=2}^{n}\frac{k-1}{n^2}\times\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1}i=\frac{n-1}{2n^2}.\end{aligned}$$

3. (a) $T(\Omega)=[\![1,n]\!]$. De plus, pour tout k de $[\![1,n]\!]$, on a $n+1-k\in Z(\Omega)$ si bien que :

$$\mathbb{P}(T=k)=\mathbb{P}(n+1-Z=k)=\mathbb{P}(Z=n+1-k)=\frac{1}{n}.$$

Ainsi, T suit la loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$.

   (b) Oui, d'après le lemme des coalitions.

   (c) On applique le résultat de la question 2 aux trois variables X, Y et T qui sont mutuellement indépendantes et suivent chacune la même loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Ainsi,

$$\mathbb{P}(X+Y+Z=n+1)=\mathbb{P}(X+Y=n+1-Z)=\mathbb{P}(X+Y=T)=\frac{n-1}{2n^2}.$$

   (d) On applique le résultat de la question 2 aux trois variables $X'=n+1-X$, $Y'=n+1-Y$ et Z qui sont mutuellement indépendantes (lemme des coalitions) et suivent la même loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ (cf. question 3a). Ainsi,

$$\mathbb{P}(X+Y+Z=2n+2)=\mathbb{P}(Z=n+1-X+n+1-Y)=\mathbb{P}(X'+Y'=Z)=\frac{n-1}{2n^2}.$$

Sujet 4.3

On note E l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant les deux hypothèses :
(i) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| < 1$.
(ii) pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = \dfrac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}$.

1. Déterminer toutes les fonctions constantes qui sont dans E.
2. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad u(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}.$$
La fonction u est-elle dans E ?

L'ensemble E étant non vide, on considère, dans toute la suite, une fonction f appartenant à E.

3. Déterminer $f(0)$. Montrer que f est impaire.
4. On suppose que f est continue en 0. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers un réel x. Etudier la convergence de la suite $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$.
5. On suppose que f est dérivable en 0.
   (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $f'(0)$ et de $f(x)$.
   (b) Montrer que la fonction f est monotone sur $\mathbb{R}$.
   (c) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)} \times \mathrm{e}^{-2f'(0)x}.$$
   Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer la fonction dérivée g'.
   (d) En déduire, pour tout réel x, une expression de $f(x)$ en fonction de $f'(0)$ et de x.

Sujet 4.3 au format de l'année 2025

Soit E l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant les deux hypothèses :
(i) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| < 1$.
(ii) pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$.
(iii) f est dérivable en 0.
L'ensemble E étant supposé non vide, on considère une fonction f appartenant à E.

1. (a) Déterminer $f(0)$.
   (b) Étudier la parité de f.
2. (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f'(x)$ en fonction de $f'(0)$ et de $f(x)$.
   (b) Montrer que la fonction f est monotone sur $\mathbb{R}$.
3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)} \times \mathrm{e}^{-2f'(0)x}.$$

   (a) Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer la fonction dérivée g'.
   (b) Pour tout réel x, donner une expression de $f(x)$ en fonction de $f'(0)$ et de x.

Solution du sujet 4.3

1. Soit $f \in E$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = k$. L'hypothèse (ii) donne $k = \dfrac{2k}{1+k^2}$. Si $k \neq 0$, $1 + k^2 = 2$, donc $k \in \{-1, 1\}$. Ceci est impossible avec (i). Donc $k = 0$. Réciproquement, on vérifie que la fonction nulle est bien dans E. .
2. Le calcul montre que u est bien dans E.
3. Lorsque $x = y = 0$, on a $f(0) = \frac{2f(0)}{1+f(0)^2}$. Comme dans la question 1, on montre que $f(0) = 0$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant l'hypothèse (ii) au couple $(x, -x)$, on trouve $0 = f(0) = \frac{f(x)+f(-x)}{1+f(x)f(-x)}$.
   Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$. La fonction f est impaire.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers x. Par l'hypothèse (ii),
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad f(x_n) = f(x + x_n - x) = \frac{f(x) + f(x_n - x)}{1 + f(x)f(x_n - x)}.$$
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n - x) = 0$ et comme f est continue en 0, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n - x) = f(0) = 0$.
   On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$. **Ceci prouve que f est continue en x, mais la caractérisation séquentielle de la continuité ne figure pas explicitement au programme BL.**
5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}\backslash\{x\}$. Alors, par l'hypothèse (ii),
   $$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{f(y - x + x) - f(x)}{y - x} = \frac{1}{y - x} \times \left(\frac{f(y - x) + f(x)}{1 + f(y - x)f(x)} - f(x)\right).$$
   Donc,
   $$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \frac{f(y - x)}{y - x} \times \left(\frac{1 - f^2(x)}{1 + f(y - x)f(x)}\right).$$
   Puisque f est dérivable en 0, $\lim\limits_{y\to x}\left(\dfrac{f(y - x)}{y - x}\right) = f'(0)$.
   Puisque f est dérivable en 0, f est continue en 0 et $\lim\limits_{y\to x} f(y - x) = f(0) = 0$.
   On en conclut que
   $$\lim_{y\to x}\left(\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right) = f'(0) \times (1 - f(x)^2).$$
   La fonction f est donc dérivable en tout réel x avec $\forall\, x \in \mathbb{R},\ \ f'(x) = f'(0)(1 - f^2(x))$.

   (b) Par (i), pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - f(x)^2 > 0$. Ainsi, la dérivée de f est du signe de $f'(0)$. Il suit que la fonction f est monotone sur $\mathbb{R}$.

   (c) La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x,
   $$g'(x) = \frac{f'(x)(1 - f(x)) + f'(x)(1 + f(x))}{(1 - f(x))^2} \times \mathrm{e}^{-2f'(0)x} - 2f'(0)\frac{1 + f(x)}{1 - f(x)} \times \mathrm{e}^{-2f'(0)x}.$$
   Soit
   $$g'(x) = \left(\frac{2f'(x)}{(1 - f(x))^2} - 2f'(0)\frac{1 + f(x)}{(1 - f(x))}\right) \times \mathrm{e}^{-2f'(0)x} = 0.$$

   (d) La dérivée de g est nulle sur $\mathbb{R}$ donc g est constante sur $\mathbb{R}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = g(0) = 1$.
   On en déduit que
   $$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)} \times \mathrm{e}^{-2f'(0)x} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)} = \mathrm{e}^{2f'(0)x}.$$
   Après calculs, on obtient
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\mathrm{e}^{2f'(0)x} - 1}{\mathrm{e}^{2f'(0)x} + 1}.$$

Sujet 4.4

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}$ est bien définie.

On pose ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}.$$

2. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note ℓ sa limite que l'on ne cherchera pas à calculer.
   (b) Montrer que $\ell \in [0,1]$.
3. (a) Déterminer trois constantes réelles $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ telles que

$$\forall\, t \in [0,1], \qquad \frac{1}{1+t^3} = \frac{\alpha}{1+t} + \frac{\beta t + \gamma}{1-t+t^2}.$$

   (b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t+t^2}$.
   (c) En déduire la valeur de u_1.
4. Déterminer deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = a_n + b_n(u_n - u_{n+1}).$$

5. (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n2^n}$ converge. **On admet** que sa somme est égale à $\ln 2$.
   (b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{n}$ converge et exprimer sa somme en fonction de ℓ et de u_1.
   En déduire la valeur de ℓ.

Sujet 4.4 au format de l'année 2025

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n}.$$

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge. On note ℓ sa limite que l'on ne cherchera pas à calculer.

   (b) Montrer que $\ell \in [0,1]$.

2. Déterminer deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n = a_n + b_n(u_n - u_{n+1}).$$

3. (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n2^n}$ converge. **On admet** que sa somme est égale à $\ln 2$.

   (b) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{n}$ converge et exprimer sa somme en fonction de ℓ et de u_1.

Solution du sujet 4.4

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^3)^n}$ est continue sur le segment $[0,1]$.

2. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $t \in [0,1]$, $1 \leqslant (1+t^3)^n \leqslant (1+t^3)^{n+1}$.
D'où, $0 \leqslant \dfrac{1}{(1+t^3)^{n+1}} \leqslant \dfrac{1}{(1+t^3)^n} \leqslant 1$.
Par croissance de l'intégrale, on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0. Donc, elle converge vers une limite ℓ.
(b) On vient de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. Par passage à la limite, $\ell \in [0,1]$.

3. (a) Le calcul montre que pour tout $t \in [0,1]$, $\dfrac{1}{1+t^3} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{1+t} - \dfrac{1}{3} \times \dfrac{t-2}{1-t+t^2}$.
(b) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t^2 - t + 1 = \left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$.
D'où, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\int_0^1 \frac{1}{\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\mathrm{d}t = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1$.
Comme $\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{\pi}{6}$, il vient $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t = \frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$.
(c) Comme $t - 2 = \dfrac{1}{2}(2t-1) - \dfrac{3}{2}$, il vient
$\displaystyle\int_0^1 \frac{t-2}{t^2-t+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t-1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+1}\mathrm{d}t = 0 - \frac{3\sqrt{3}\pi}{9}$.
Ainsi,
$$u_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} = \frac{1}{3} \times \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \frac{1}{3} \times \int_0^1 \frac{t-2}{1-t+t^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{\sqrt{3}\pi}{9}.$$

4. On effectue une intégration par parties en posant $u : t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^3)^n}$ et $v : t \mapsto t$, qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Comme $u' : t \mapsto \dfrac{-n3t^2}{(1+t^3)^{n+1}}$, on obtient
$$u_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^3)^n} = \left[\frac{t}{(1+t^3)^n}\right]_0^1 + 3n\int_0^1 \frac{t^3}{(1+t^3)^{n+1}}\mathrm{d}t.$$
En écrivant $t^3 = t^3 + 1 - 1$ dans la seconde intégrale, il vient $u_n = \dfrac{1}{2^n} + 3n(u_n - u_{n+1})$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{1}{2^n}$ et $b_n = 3n$.

5. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \dfrac{1}{n2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. La série $\sum \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ est convergente comme série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$. Par critère de comparaison des séries à termes positifs, la série est convergente.
(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{u_k}{k} = \dfrac{1}{k2^k} + 3(u_k - u_{k+1})$.
En sommant cette relation de 1 à n, il vient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k2^k} + 3(u_1 - u_{n+1})$.
En faisant tendre n tend vers $+\infty$, on trouve $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{u_k}{k} = \ln 2 + 3(u_1 - \ell)$.
Remarque : on pourrait en déduire la valeur de ℓ. En effet, si $\ell \neq 0$, alors $\dfrac{u_n}{n} \sim \dfrac{\ell}{n}$ qui est le terme général d'une série divergente. Donc $\ell = 0$.
On rappelle cependant que les équivalents sont hors programme en BL.

Sujet 4.5

On considère la fonction f définie par $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-x)^2} & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[\\ \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Dans toute la suite, on considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et admettant la fonction f pour densité.

2. Déterminer la fonction de répartition F de X.
3. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui, calculer sa valeur.
4. (a) Après avoir prouvé son existence, calculer l'espérance de $(X-1)^2$.
   (b) Montrer que X admet une variance et calculer sa valeur.
5. On appelle variable indicatrice d'un événement A, la variable de Bernoulli qui vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon.
   On considère la variable aléatoire Y, indicatrice de l'événement $\left[X \leqslant \dfrac{1}{2}\right]$ et la variable aléatoire Z, indicatrice de l'événement $\left[X > \dfrac{1}{2}\right]$.
   (a) Trouver deux réels a et b tels que $Y = aZ + b$.
   (b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de Y et Z.
   (c) Calculer la covariance de Y et Z. Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

Sujet 4.5 au format de l'année 2025

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2(1-x)^2} & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[\\ \dfrac{1}{2x^2} & \text{si } \ x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

Dans toute la suite, on considère une variable aléatoire X admettant la fonction f pour densité.

2. (a) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Si oui, calculer sa valeur.
   (b) La variable aléatoire X admet-elle une variance ? Si oui, calculer sa valeur.
3. On appelle variable indicatrice d'un événement A, la variable de Bernoulli qui vaut 1 si A est réalisé et 0 sinon. Soient Y la variable indicatrice de l'événement $\left[X \leqslant \dfrac{1}{2}\right]$ et Z la variable indicatrice de l'événement $\left[X > \dfrac{1}{2}\right]$.
   (a) Trouver deux réels a et b tels que $Y = aZ + b$.
   (b) Calculer la covariance de Y et Z. Les variables Y et Z sont-elles indépendantes ?

Solution du sujet 4.5

1. La fonction f est positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}-\left\{0,\frac{1}{2},1\right\}$ et on vérifie que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.
2. • Si $x<0$, $F(x)=\mathbb{P}(X\leqslant x)=0$. Si $x\geqslant 1$, $F(x)=\mathbb{P}(X\leqslant x)=1$.
   • Si $0\leqslant x<\frac{1}{2}$, $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_0^x \frac{1}{2(1-t)^2}dt=\left[\frac{1}{2}\frac{1}{1-t}\right]_0^x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}-1\right)=\frac{1}{2}\frac{x}{1-x}$.
   • Si $\frac{1}{2}\leqslant x<1$, $F(x)=\displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_0^{1/2}\frac{1}{2(1-t)^2}dt+\int_{1/2}^x\frac{1}{2t^2}dt=\frac{1}{2}+\left[\frac{1}{2}\frac{-1}{t}\right]_{1/2}^x=\frac{3}{2}-\frac{1}{2x}$
3. Après avoir expliqué pourquoi cette intégrale converge absolument, on calcule
$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{1}{2}\ln(2)=\frac{1}{2}.$$
   On conclut que X a une espérance et $E(X)=\frac{1}{2}$
4. (a) La variable $T=(X-1)^2$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}(t-1)^2 f(t)\,dt$ est (absolument) convergente. Le calcul donne
$$\int_0^{1/2}(t-1)^2 f(t)\,dt=\int_0^{1/2}\frac{(t-1)^2}{2(1-t)^2}dt=\left[\frac{1}{2}t\right]_0^{1/2}=\frac{1}{4}$$
   et
$$\int_{1/2}^1 (t-1)^2 f(t)\,dt=\int_{1/2}^1\frac{t^2-2t+1}{2t^2}dt=\int_{1/2}^1\frac{1}{2}-\frac{1}{t}+\frac{1}{2t^2}dt=\frac{3}{4}-\ln(2)$$
   D'où, $E\left((X-1)^2\right)=1-\ln(2)$
   (b) Comme les variables $(X-1)^2$ et X admettent chacune une espérance, on en déduit que X^2 a une espérance et $E\left(X^2\right)=E\left((X-1)^2\right)+2E(X)-1=1-\ln(2)+1-1=1-\ln(2)$.
   On en déduit que X a une variance qui, par la formule de Huygens, vaut $V(X)=\frac{3}{4}-\ln 2$.
5. (a) Écrivons $Y=aZ+b$.
   • $(Y=1)=(X\leqslant\frac{1}{2})=(Z=0)$.
   Ainsi, quand Y vaut 1, Z vaut 0. Ceci nous donne une première relation : $1=b$.
   • $(Y=0)=(X>\frac{1}{2})=(Z=1)$.
   Ainsi, quand Y vaut 0, Z vaut 1. Ceci nous donne une seconde relation : $0=a+b$, d'où $a=-b=-1$.
   On a donc $Y=1-Z$.
   (b) Comme $Y=1-Z$, le cours donne $\rho(Y,Z)=-1$.
   (c) $\star$ D'après le cours, $-1=\rho(Y,Z)=\dfrac{\operatorname{cov}(Y,Z)}{\sigma(Y)\,\sigma(Z)}$. Donc $\operatorname{cov}(Y,Z)=-\sigma(Y)\,\sigma(Z)$.
   Or, $V(Y)=V(1-Z)=V(Z)$. D'où, $\sigma(Y)=\sigma(Z)=\sqrt{V(Y)}$ et $\operatorname{cov}(Y,Z)=-V(Y)$.

   $\star$ Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $p=\mathbb{P}(Y=1)=\mathbb{P}\left(X\leqslant\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$
   Donc, $Y\hookrightarrow\mathcal{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ et $V(Y)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$. $\operatorname{cov}(Y,Z)=-\frac{1}{4}$. Il suit que Y et Z ne sont pas indépendantes (sinon, leur covariance devrait être nulle).

CHAPITRE

5

EXEMPLES DE QUESTIONS COURTES

Question sans préparation 1

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Soit u un endomorphisme de E qui commute avec tous les projecteurs de E.

1. Montrer que si $x \in E$ avec $x \neq 0$, alors x est vecteur propre de u.
2. En déduire que u est une homothétie, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda \mathrm{id}_E$.

Solution de la QSP.

1. Si u commute avec un projecteur p, alors u stabilise $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p$.
   Soit $x \neq 0$. On complète x en une base de E, $(x, e_2, \ldots, e_n)$ et on définit la projection p_x par
   $$p_x(x) = x, \; p_x(e_i) = 0 \quad \forall i \in [\![2, n]\!]$$
   Ainsi $u(x) \in \operatorname{Im}(p_x) \Rightarrow u(x) = \lambda_x x$.
   Autre rédaction : soit p le projecteur sur $\operatorname{Vect}(x)$ par rapport à,un supplémentaire quelconque.
   Alors $p(x) = x$. Donc $u(x) = u(p(x)) = p(u(x)) \in \operatorname{Im} p$.
   Or $\operatorname{Im} p = \operatorname{Vect}(x)$, d'où $u(x) = \lambda_x x$.
2. Ainsi tout vecteur non nul de E est vecteur propre de u.
   Par l'absurde supposons que $\lambda \neq \mu$ sont deux valeurs propres différentes de u.
   Alors existe x, y non nuls et indépendants tels que $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$. Donc
   $$u(x + y) = \lambda x + \mu y = \alpha(x + y) \Rightarrow \lambda = \alpha = \mu$$
   Il existe donc λ tel que pour tout $x \in E, u(x) = \lambda x$.

Question sans préparation 2

Soit un entier avec $n \geqslant 2$. Soit n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ et vérifiant pour tout $(i, j) \in [\![0, n]\!]^2$ avec i et j distincts :

$$\forall (k, m) \in [\![0, n]\!]^2, \quad P\big([X_i = k] \cap [X_j = m]\big) = \begin{cases} 0 & \text{si } m = k \\ \dfrac{1}{n(n+1)} & \text{si } m \neq k \end{cases}$$

On pose $Z_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

1. Déterminer les valeurs prises par Z_n.
2. Déterminer la loi de Z_n.

Solution de la QSP.

1. On a $Z_n(\Omega) = \{0, 1\}$ (presque sûrement). En effet, si l'événement $[Z_n \geqslant 2]$ est réalisé, alors on a nécessairement au moins deux variables parmi $X_1, \ldots, X_n$ qui sont égales, ce qui est de probabilité nulle.
2. On a : $[Z_n = 0] = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} [X_i = 0]$. Ces événements sont presque sûrement incompatibles puisque $P\big([X_i = k] \cap [X_j = m]\big) = 0$ si $m = k$. On a donc :

$$P([Z_n = 0]) = \sum_{i=1}^{n} P([X_i = 0])$$

Or, elles ont toutes la même loi car, en utilisant le système complet d'événements $([X_j = p])$; $p \in [\![0, n]\!]$:

$$P([X_i = 0]) = \sum_{p=0}^{n} P\big([X_i = 0] \cap [X_j = p]\big) = \sum_{p=0, p \neq i}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

On a donc :

$$P([Z_n = 0]) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Donc $P[Z_n = 1] = \frac{1}{n+1}$ donc Z_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n+1}$.

Question sans préparation 3

1. Si X suit la loi exponentielle de paramètre 1, déterminer $E(X^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$.
2. Si Y suit la loi exponentielle de paramètre λ, trouver un équivalent quand $n \to +\infty$ de $E\left(\left(Y - \dfrac{1}{\lambda}\right)^n\right)$.

Solution de la QSP.

1. Par théorème de transfert, $E(X^k)$ existe si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t$ converge absolument.
   En utilisant les propriétés de la fonction Gamma, on obtient que $E(X^k)$ existe et vaut $\Gamma(k+1) = k!$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $\left(Y - \dfrac{1}{\lambda}\right)^n = \dfrac{(\lambda Y - 1)^n}{\lambda^n} = \dfrac{(X-1)^n}{\lambda^n}$, où $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$.
   Et $(X-1)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^k$ d'après la formule du binôme.
   D'où : $E((X-1)^n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} k!$ par linéarité de l'espérance.
   Ainsi : $E((X-1)^n) = n! \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = n! \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathrm{e}}}$.
   Ainsi : $E\left(\left(Y - \dfrac{1}{\lambda}\right)^n\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n!}{\lambda^n \mathrm{e}}$.
   Autre rédaction : faire le changement de variable $u = \lambda t$ dans l'intégrale qui exprime $E\left(\left(Y - \dfrac{1}{\lambda}\right)^n\right)$.

Question sans préparation 4

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
On dit qu'une application φ de E dans E est une isométrie si $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| = \|x - y\|$ pour tout $(x, y) \in E^2$.
On note $\mathcal{I}(E)$ l'ensemble des isométries de E dans E.

1. Soit $f \in \mathcal{I}(E)$, montrer qu'il existe $(u, g) \in E \times \mathcal{I}(E)$ tel que :
$$g(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E,\ f(x) = u + g(x).$$
Montrer ensuite que $\langle g(x), g(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tout $(x, y) \in E^2$.
En déduire que g est linéaire et que c'est un isomorphisme de E.
2. Donner un exemple d'application h de E dans E qui vérifie $\|h(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$ mais qui n'est pas une isométrie.

Solution de la QSP.

1. On voit qu'il faudrait que $u = f(0)$, on définit donc g par $g(x) = f(x) - f(0)$ pour tout $x \in E$.
Il est clair que le couple $(f(0), g)$ convient.
Comme g est une isométrie, pour tout couple $(x, y) \in E^2$ on obtient par développement
$$\|g(x)\|^2 + \|g(y)\|^2 - 2\langle g(x), g(y)\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle.$$
Or $g(0) = 0$, ce qui entraîne $\|g(v)\| = \|g(v) - g(0)\| = \|v - 0\| = \|v\|$ pour tout $v \in E$.
En tenant compte de cette propriété dans le développement précédent, on aboutit après simplification à l'égalité demandée.
Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E, alors on doit avoir $\langle g(e_i), g(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle$ pour tout couple $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ ce qui implique que $\mathcal{B}' = (g(e_1), \cdots, g(e_n))$ est aussi une base orthonormée.
On en déduit que pour tout $x \in E$ on a
$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle g(x), g(e_i)\rangle g(e_i) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle g(e_i),$$
il est alors clair que g est linéaire.
De plus, on a vu que l'image de la base $\mathcal{B}$ est une base, le cours nous dit alors que g est un isomorphisme.
2. Si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base orthonormée de E, il suffit de considérer l'application h définie par
$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle| e_i.$$
En effet, on a bien $h(0) = 0$ et $\|h(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$ mais $h(x) + h(-x) = 2h(x) \neq 0$ si $x \neq 0$, ce qui interdit à h d'être une isométrie d'après la question 1).

Question sans préparation 5

On considère une fonction f qui est de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $I = [0,1]$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier l'existence d'une constante $M \in \mathbb{R}^2$ telle que
$$\left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \frac{M}{2}\left(t - \frac{k}{n}\right)^2.$$
pour tout couple $(k,t) \in [\![0,n]\!] \times I$.
2. En déduire que
$$\lim_{n\to+\infty} n\left[\int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right] = \frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

Solution de la QSP.

1. Comme la fonction $|f''|$ est continue sur le segment I elle possède un maximum $M \in \mathbb{R}_+$. L'inégalité de Taylor Lagrange s'applique et donne ce que l'on souhaite.
2. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On intègre l'inégalité précédente entre $\frac{k}{n}$ et $\frac{k+1}{n}$ et avec la version intégrale de l'inégalité triangulaire il vient
$$\left| \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)dt - \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2} f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leqslant \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| dt \leqslant \frac{M}{6n^3}.$$
D'où, par somme, et produit par n :
$$\begin{aligned} n\left| \int_0^1 f(t)dt - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{2n^2}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| dt &\leqslant n \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left| f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right) - \left(t - \frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| dt \\ &\leqslant n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M}{6n^3} = \frac{M}{6n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$
Et on conclut car la somme de Riemann associée à f' qui apparaît converge vers $\displaystyle\int_0^1 f'(t)dt = f(1) - f(0)$.

Question sans préparation 6

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ indépendantes et de même loi. On pose $p = P(X_1 = 1)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit une variable aléatoire Y_n par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y_n(\omega) = \mathrm{card}\{k \in [\![1, n]\!] | X_k(\omega) = 1\},$$

où l'on a noté « card$E$ » le cardinal de l'ensemble (fini) E.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y_n.
2. Soit $\lambda > 0$. Soit N une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ qui suit la loi de Poisson de paramètre λ et qui est indépendante des variables X_n. On définit une variable aléatoire Z par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Z(\omega) = Y_{N(\omega)}(\omega).$$

Déterminer le loi de Z

Solution de la QSP.

1. On reconnaît que Y_n compte le nombre d'événements réalisés parmi $(X_1 = 1), \ldots, (X_n = 1)$.
   Ils sont indépendants de même probabilité p donc Y_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$ (avec le cas particulier de la loi certaine nulle si $n = 0$).
2. On a $Z(\Omega) = \mathbb{N}$, et pout tout $k \in \mathbb{N}$, la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $(N = k)_{k\in\mathbb{N}}$ donne :

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P((Z = k) \cap (N = n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P((Y_n = k) \cap (N = n)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y_n = k)P(N = n) \quad \text{(indépendance)} \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{(\lambda q)^{n-k}}{(n-k)!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{(\lambda p)}{k!} \mathrm{e}^{\lambda q} = \mathrm{e}^{-\lambda p} \frac{(\lambda p)}{k!}. \end{aligned}$$

Donc Z suit la loi de Poisson de paramètre λp.

Question sans préparation 7

Soit (u_n) la suite déterminée par la donnée du réel $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence suivante :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+2u_n}.$$

Soit (v_n) la suite définie par

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \qquad v_n = \frac{1}{u_n}.$$

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont bien définies et montrer que la suite (u_n) converge vers une limite réelle que l'on notera ℓ.
2. Déterminer la nature de la série $\sum(u_n - \ell)$.

Solution de la QSP.

1. Par récurrence sur $n \geqslant 0$, on montre que u_n est définie et $u_n > 0$.
   Donc (v_n) est bien définie aussi.
   On a $\dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{2u_n} + 1$, soit $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}v_n + 1$.
   La suite (v_n) est arithmético-géométrique. Son point fixe est $x = 2$ donc, pour tout $n \geqslant 0$, on a :
   $$v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - 2) + 2 \text{ d'où } \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}.}$$
2. On en déduit que :
   $$u_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{2^{n+1}}(v_0-2)} - 1\right) \sim -\frac{1}{2^{n+2}}(v_0 - 2).$$
   Donc la série converge (absolument) par comparaison à une série géométrique.

Question sans préparation 8

Soit X une variable aléatoire positive qui possède une densité continue sur $\mathbb{R}_+$ et qui admet une espérance strictement positive.
On considère une fonction h définie sur $\mathbb{R}_+$, qui est positive, croissante, de classe $\mathcal{C}^1$ et qui s'annule en 0.

1. On suppose que l'espérance de $h(X)$ existe. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$E(h(X)) = \int_0^{+\infty} h'(t)P(X > t)dt.$$
2. Soit $p \in [\![2, +\infty[\![$.
On suppose de plus que X admet un moment d'ordre p et que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} h'(t)t^{-p}dt$ converge.
Prouver que :
$$E(h(X)) \leqslant h(E(X)) + E(X^p)\int_{E(X)}^{+\infty} \frac{h'(t)}{t^p}dt.$$

Solution de la QSP.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Notons F_X (resp f_X) la fonction de répartition (resp. la densité) de X.
On se souvient que $P(X > t) = 1 - F_X(t)$, une intégration par partie (justifiée par les hypothèses) nous donne
$$\int_0^a h(t)f_X(t)dt = [h(t)(F_X(t) - 1)]_0^a - \int_0^a h'(t)(F_X(t) - 1)dt = -h(a)P(X > a) + \int_0^a h'(t)P(X > t)dt.$$
Ensuite on tendre a vers $+\infty$ où :
   - comme $E(h(X))$ existe, le membre de gauche converge (théorème de transfert) ;
   - on a $0 \leqslant h(a)P(X > a) = h(a)\int_a^{+\infty} f_X(t)dt \leqslant \int_a^{+\infty} h(t)f_X(t)dt \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

   D'où la formule souhaitée (y compris la convergence).
2. On utilise la question 1). Compte tenu des hypothèses , il vient
$$E(h(X)) \leqslant \int_0^{E(X)} h'(t)dt + \int_{E(X)}^{+\infty} h'(t)P(X^p > t^p)dt \leqslant h((E(X)) + E(X^p)\int_{E(X)}^{+\infty} \frac{h'(t)}{t^p}dt,$$
d'après l'inégalité de Markov $P(X^p > t^p) \leqslant \frac{E(X^p)}{t^p}$. La dernière intégrale est convergente grâce à la deuxième hypothèse de cette question car $E(X) > 0$.

Question sans préparation 9

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $(u_1, ..., u_m)$, $(v_1, ..., v_m)$ deux m-uplets d'éléments de E tels que :

$$\forall (i,j) \in \{1, ..., m\}^2,\ \langle u_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que les familles $(u_1, ..., u_m)$ et $(v_1, ..., v_m)$ sont libres.
2. Soit p le projecteur orthogonal sur le sous espace vectoriel F engendré par $(u_1, ..., u_m)$.

   Montrer que pour tout x dans E, $\|p(x)\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \langle x, u_i \rangle \langle x, p(v_i) \rangle$.

Solution de la QSP.

1. Soit $a_1, ..., a_n$ des réels tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i u_i = 0$. On a alors pour tout j , $\left\langle \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i u_i, v_j \right\rangle = 0$,
   d'où par linéarité du produit scalaire, $a_j \langle u_j, v_j \rangle = 0$ i.e. $a_j = 0$ ce qui prouve que $(u_1, ..., u_m)$ est libre.
   Raisonnement analogue pour $(v_1, ..., v_m)$.
2. Soit x un vecteur qui s'écrit $x = y + z$ où $y \in F$ et $z \in F^{\perp}$. Alors $p(x) = y$ d'où $\|p(x)\|^2 = \|y\|^2$.

   Or $y \in F$, d'où il existe $a_1, ..., a_m$ des réels tels que $y = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i u_i$. On voit que $a_i = \langle y, v_i \rangle$. D'où :

   $$\|y\|^2 = \left\langle y, \sum_{i=1}^{m} \langle y, v_i \rangle u_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle y, u_i \rangle \langle y, v_i \rangle$$

   Or $\langle x, u_i \rangle = \langle y + z, u_i \rangle = \langle y, u_i \rangle$ car z est orthogonal à F donc à u_i.
   Et $\langle y, v_i \rangle = \langle p(x), v_i \rangle = \langle x, p(v_i) \rangle$ par symétrie de p.

   Finalement $\|p(x)\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \langle x, u_i \rangle \langle x, p(v_i) \rangle$.

Question sans préparation 10

Soit $0 < a < b$ réels et $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \neq 0$ par

$$f(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2} dt$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée f'
2. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0.
3. La fonction ainsi prolongée est-elle de classe $C^1(\mathbb{R})$?

Solution de la QSP.

1. Par le th. fondamental du calcul intégral, la fonction $t \to \dfrac{\sin t}{t^2}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, il vient

$$f'(x) = b \times \frac{\sin(bx)}{b^2x^2} - a \times \frac{\sin(ax)}{a^2x^2}.$$

2. On remarque que la fonction f est impaire.
   Or, on sait que pour $t > 0$, $t - \dfrac{t^2}{2} \leqslant \sin t \leqslant t$ (inégalité de Taylor-Lagrange). Donc :

$$\frac{1}{t} - \frac{t}{2} \leqslant \frac{\sin t}{t^2} \leqslant \frac{1}{t}$$

   En intégrant, il vient

$$\ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{1}{4}\left(a^2x^2 - b^2x^2\right) \leqslant f(x) \leqslant \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

   Donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$.

3. Un DL en 0, $\sin(ax) = ax - \dfrac{a^3x^3}{6} + o(x^3)$ donne $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.
   Remarque : l'utilisation de ce calcul pour résoudre la question 2 avec le théorème de prolongement des fonctions C^1 (au programme) n'est pas valable car il faut aussi prouver que f converge en 0.