

Rapport et exercices oraux HEC Mathématiques ECG

Maths approfondies

Juin 2024

Dans leur grande majorité, les candidats montrent de belles qualités de logique et de présentation. On trouve bien sûr une large diversité entre eux, les notes s'étalant de 2 à 20.

Les candidats les plus faibles ont montré d'importantes lacunes dans la connaissance du cours ainsi que de grosses faiblesses en calcul.

A contrario, les meilleurs candidats étaient brillants dans leurs connaissances, faisaient preuve de finesse dans leurs raisonnements et démontraient un certain recul sur les concepts étudiés.

La moyenne est de 11,20 et l'écart-type est de 3,93.

Le jury aimerait insister sur les points suivants.

- Comme annoncé à l'issue de la session 2023, et dans la continuité du mouvement inauguré par la dernière réforme des programmes, l'informatique a eu une place encore plus importante cette année. Quasiment toutes les planches comptaient une question d'informatique, que ce soit dans l'exercice principal ou lors de la question sans préparation. Cette évolution avait été annoncée en amont et a bien été prise en compte par les candidats. Le jury n'a remarqué qu'une minorité de candidats qui avaient totalement délaissé cette partie du programme. Une telle attitude a systématiquement été sanctionnée.

Les candidats doivent s'attendre pour l'année prochaine, et les suivantes, à ce que l'informatique garde la place qu'elle occupe désormais. Chaque planche proposée aux candidats continuera à comporter au moins une question concernant le programme d'informatique. Ces questions permettent d'évaluer l'esprit pratique et de relier les mathématiques à des cas concrets.

- Le jury apprécie particulièrement les candidats attentifs à la cohérence de leurs résultats. Cela est notamment le cas quand cela permet, par exemple, à des candidats de repérer des erreurs de calcul. Des candidats ayant ainsi d'eux-mêmes corrigé leurs erreurs ont été récompensés.
- Les candidats doivent savoir citer précisément les résultats de leur cours avec toutes les hypothèses nécessaires. A ce propos, le jury a été frappé notamment par la méconnaissance de la définition d'un estimateur convergent. Les candidats nous donnant simplement une condition suffisante afin d'avoir un estimateur convergent.

Pour étudier la monotonie d'une suite ou d'une fonction, les relations d'ordre suffisent souvent. Il est inutile de se lancer dans des gros calculs.

Nous avons encore trop souvent des récurrences mal posées ou qui ne servent à rien...

- Le jury attend des candidats qu'ils soient en mesure d'illustrer leurs raisonnements par des schémas, et qu'ils soient également capables de tracer rapidement l'allure du graphe d'une fonction.
- Il est important de participer à la journée de l'oral ou, au moins, de la visionner. Elle répond aux questions de l'organisation et des attendus de chaque oral. Cela permet aux étudiants d'apprendre le déroulement d'un oral du point de vue des membres du jury.

Nous félicitons ceux, nombreux, qui se sont accrochés jusqu'au bout, essayant diverses méthodes, proposant des idées.

L'exercice sans préparation a très bien rempli son rôle et permet de rattraper des premières parties d'oraux mal commencés, ou de confirmer une prestation remarquable.

Voici quelques sujets proposés cette année. Nous publions aussi leurs corrigés, mais insistons sur le fait que ces corrigés sont indicatifs, ont été écrit à l'intention des membres de jury et ne correspondent pas toujours exactement à un attendu.

SUJET Maths Approfondies 1

Exercice principal Maths Approfondies 1

Dans toute la suite $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ désigne un espace probabilisé et Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ où $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$. Dans toute la suite M désigne un entier naturel et Z la variable aléatoire définie par

$$Z = \min(Y, M).$$

1. Question de cours : rappeler la loi géométrique ainsi que l'espérance et la variance associées.
2. Déterminer la loi de Z ? On considère désormais les polynômes $(T_n)_{n \geq 0}$ définis par la relation de récurrence :

$$T_0(X) = 1, T_1(X) = X \text{ et } T_{n+2}(X) = 2XT_{n+1}(X) - T_n(X).$$

3. Montrer que pour tout $n \geq 0$, T_n est de degré égal à n et déterminer son coefficient dominant.
On note dans la suite $a_{n,k}$, $0 \leq k \leq n$, les coefficients du polynôme T_n . Ainsi :

$$T_n(X) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} X^k.$$

On convient désormais que $a_{n,k} = 0$ pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $n < k$.

4. Ecrire une fonction **Python** ayant comme paramètres d'entrée un entier n et un réel x et qui renvoie $T_n(x)$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.
6. Soit $x \in [-1, 1]$. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x) q^n$ converge. Puis établir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x) q^n = \frac{1 - qx}{q^2 - 2qx + 1}$$

7. Soit $x \in [-1, 1]$. On pose

$$H_M(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}(a_{Z,k}) x^k.$$

Montrer que $H_M(x)$ est bien défini et que

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} H_M(x) = p \frac{1 - qx}{q^2 - 2qx + 1}.$$

Solution :

1. p23 ECappro1
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $k > M$, on a

$$\mathbb{P}(Z = k) = 0.$$

Si $k < M$, on a

$$\mathbb{P}(Z = k) = \mathbb{P}(Y = k) = pq^k.$$

Si $k = M$, on a

$$\mathbb{P}(Z = M) = \mathbb{P}(Y \geq M) = 1 - \sum_{k=0}^{M-1} P(Y = k) = 1 - \sum_{k=0}^{M-1} pq^k = q^M.$$

3. Par récurrence, on montre facilement que pour tout $n \geq 0$, T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1} .
- 4.

```
def cheb(n, x):  
    res = 0  
    if (n == 0):  
        res = 1  
    elif (n == 1):  
        res = x  
    elif (n >= 2):  
        res = 2*x*cheb(n-1, x) - cheb(n-2, x)  
  
    return res
```

5. On procède par récurrence. Pour $n = 0$ ou 1 l'affirmation est vraie. Supposons qu'elle est vraie jusqu'à un certain $n \in \mathbb{N}$. On a alors :

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\cos(\theta)) &= 2 \cos \theta T_n(\cos \theta) - T_{n-1}(\cos \theta) \\ &= 2 \cos(\theta) \cos(n\theta) - \cos((n-1)\theta) \\ &= \cos(\theta) \cos(n\theta) - \sin(\theta) \sin(n\theta) = \cos((n+1)\theta). \end{aligned}$$

6. Soit $x \in [-1, 1]$. Il existe $\theta \in [0, \pi]$ tel que $x = \cos(\theta)$. Ainsi

$$|T_n(x)| = |T_n(\cos(\theta))| = |\cos(n\theta)| \leq 1.$$

D'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, |T_n(x)q^n| \leq q^n.$$

Comme la série $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k$ converge, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} T_n(x)q^n$ est absolument convergente.

7. Soit $x \in [-1, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=0}^n q^{k+2} T_{k+2}(x) = 2x \sum_{k=0}^n q^{k+2} T_{k+1}(x) - \sum_{k=0}^n q^{k+2} T_k(x).$$

D'où

$$\sum_{k=2}^{n+2} q^k T_k(x) = 2xq \sum_{k=1}^{n+1} q^k T_k(x) - q^2 \sum_{k=0}^n q^k T_k(x).$$

On fait tendre $n \rightarrow +\infty$ (tous les termes convergent) :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} q^k T_k(x) = 2xq \sum_{k=1}^{+\infty} q^k T_k(x) - q^2 \sum_{k=0}^{+\infty} q^k T_k(x).$$

En posant

$$F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} q^k T_k(x)$$

on a

$$F(x) - qx - 1 = 2xq(F(x) - 1) - q^2 F(x).$$

D'où

$$F(x) = \frac{1 - qx}{q^2 - 2qx + 1}.$$

8. On pose pour tout $k \leq N$, $Y_k = a_{Z,k}$. Puisque $Y_k = 0$ pour $k > M$, la somme

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}(Y_k) x^k \text{ est finie et}$$

$$H_M(x) = \sum_{k=0}^M \mathbb{E}(Y_k) x^k.$$

On a

$$\begin{aligned} H_M(x) &= \sum_{k=0}^M \mathbb{E}(a_{Z,k} x^k) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^M a_{Z,k} x^k\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^Z a_{Z,k} x^k\right) \\ &= \mathbb{E}(T_Z(x)) = \sum_{k=0}^M P(Z = k) T_k(x) = \sum_{k=0}^{M-1} p q^k T_k(x) + q^M T_M(x) \\ &= p \sum_{k=0}^{M-1} T_k(x) q^k + q^M T_M(x). \end{aligned}$$

Or

$$q^M T_M(x) \rightarrow 0 \text{ car } |q^M T_M(x)| \leq q^M.$$

Par ailleurs, la somme $\sum_{k=0}^{M-1} T_k(x) q^k$ converge vers

$$\sum_{k=0}^{+\infty} T_k(x) q^k = \frac{1 - qx}{q^2 - 2qx + 1}.$$

D'où le résultat.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 1

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et B une matrice de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer BA .

Solution :

On note $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ les applications canoniquement associées à A et B respectivement.

On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

L'énoncé donne : $f \circ g(e_2) = e_2$ et $f \circ g(e_3) = e_3$. D'où $g(f \circ g(e_2)) = g(e_2)$ et $g(f \circ g(e_3)) = g(e_3)$. On montre ensuite que la famille $(g(e_2), g(e_3))$ est libre.

Soit en effet $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$ag(e_2) + bg(e_3) = 0 \iff af(g(e_2)) + bf(g(e_3)) = 0 \iff ae_2 + be_3 = 0.$$

Ainsi $(g(e_2), g(e_3))$ forme une base de $\mathbb{R}^2$, dont les vecteurs sont invariants par $f \circ g$, qui est donc l'identité.

Ainsi $BA = I_2$.

SUJET Maths Approfondies 2

Exercice principal Maths Approfondies 2

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$

1. Cours : donner la définition de la convergence en loi.
2. On suppose que X_1 suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que la suite $(n(1 - M_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi. Préciser la loi limite.
3. (a) Représenter graphiquement la fonction $\varphi : x \mapsto \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.
(b) Montrer que $\arctan(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$.
4. On suppose que X_1 admet pour densité :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\pi(x^2 + 1)}.$$

- (a) Déterminer la loi de $\arctan(X_1)$.
- (b) Écrire en Python une fonction simulant la réalisation d'une variable aléatoire de densité f .
- (c) Montrer que la suite $\left(\frac{n}{M_n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi. Préciser la loi limite.

Solution :

1. Cours : cf programme EC maths approfondies page 21.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La variable aléatoire $n(1 - M_n)$ étant à valeurs dans $[0, n]$, on a

$$\forall x < 0, \mathbb{P}(n(1 - M_n) \leq x) = 0.$$

Soit $x \geq 0$. Par indépendance de $X_1, \dots, X_n$, on a :

$$n \geq x \Rightarrow \mathbb{P}(n(1 - M_n) \leq x) = \mathbb{P}\left(M_n \geq 1 - \frac{x}{n}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(M_n < 1 - \frac{x}{n}\right) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = 1 - e^{-x}$ donc la suite $(n(1 - M_n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

3. (a) L'étude de la fonction φ montre qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ de dérivée nulle.
Elle est donc constante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, respectivement égale à $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

- (b) La fonction $\arctan$ est dérivable en 0 donc :

$$\arctan(u) \underset{u \rightarrow 0}{=} \arctan(0) + \arctan'(0)u + o(u) \underset{u \rightarrow 0}{=} u + o(u).$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on trouve que :

$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

D'après la question 3.(a), $\arctan(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ pour tout $x > 0$
donc :

$$\arctan(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

4. (a) Remarquons que $\arctan(X_1)$ est à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi :

$$\forall t \leq -\frac{\pi}{2}, \mathbb{P}(\arctan(X_1) \leq t) = 0 \text{ et } \forall t \geq \frac{\pi}{2}, \mathbb{P}(\arctan(X_1) \leq t) = 1.$$

Soit $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\mathbb{P}(\arctan(X_1) \leq t) = \mathbb{P}(X_1 \leq \tan t) = \int_{-\infty}^{\tan t} \frac{dx}{\pi(x^2 + 1)} = \frac{t + \frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{t - (-\frac{\pi}{2})}{(\frac{\pi}{2}) - (-\frac{\pi}{2})}.$$

On en déduit que $\arctan(X_1)$ suit la loi uniforme sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

- (b) On utilise le résultat de la question précédente (simulation par inversion) :

```
import numpy as np
```

```
def simule_X1():
    u = np.pi * np.random() - np.pi / 2
    return np.tan(u)
```

- (c) Soit $t \leq 0$.

$$0 \leq \mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq t\right) \leq \mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq 0\right) = \mathbb{P}(M_n \leq 0) = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Soit $t > 0$.

$$\mathbb{P}\left(\frac{n}{M_n} \leq t\right) = \mathbb{P}\left(M_n \geq \frac{n}{t}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(M_n < \frac{n}{t}\right) = 1 - \left(\int_{-\infty}^{\frac{n}{t}} \frac{dx}{\pi(1+x^2)}\right)^n = 1 - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{n}{t}\right)\right]^n$$

D'après la question 3.(b),

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{n}{t}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{t}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

On en déduit que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\frac{n}{M_n} \leq t \right) = 1 - e^{-\frac{t}{\pi}}.$$

La suite $\left(\frac{n}{M_n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge donc en loi vers la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\pi}$.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une réelle symétrique et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme tel que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, P'(\lambda) \neq 0$. Montrer qu'il existe une et une seule matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que :

$$A = P(S).$$

Solution :

Puisque P' ne s'annule pas, il est de signe de constant (d'après le T.V.I.). Il en résulte que P est strictement monotone. Comme c'est un polynôme, ses limites en $\pm\infty$ sont infinies. Donc P est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. D'après le théorème spectral, A est diagonalisable : $A = QDQ^{-1}$ avec D diagonale et Q inversible (on peut même choisir Q orthogonale). Il suffit de choisir $S = QP^{-1}(D)Q^{-1}$ où $P^{-1}(D) = \text{diag}(P^{-1}(d_{1,1}), \dots, P^{-1}(d_{n,n}))$.

Soit maintenant S' une matrice symétrique vérifiant $A = P(S')$. Il en résulte que tout vecteur propre de S' est aussi vecteur propre de A . Soit $E'_1, \dots, E'_m$ les sous-espaces propres de S' . Chacun de ces sous-espaces propres de S' est inclus dans un sous-espace propre de A : $E'_i \subset E_i$. Comme $E'_1 \oplus \dots \oplus E'_m = \mathbb{R}^n$ on en déduit que $E'_i = E_i$ pour tout $i \leq m$. Donc S' et A ont les mêmes sous-espaces propres. Il en résulte que $D_0 = Q^{-1}S'Q$ est aussi diagonale. Or $P(S') = A$. Donc $QP(D_0)Q^{-1} = A = QDQ^{-1}$. Donc $P(D_0) = D$. Puisque P est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, forcément $D_0 = P^{-1}(D)$ où $P^{-1}(D)$ est la matrice diagonale ci-dessus. Ainsi, $S' = QD_0Q^{-1} = S$.

SUJET Maths Approfondies 3

Exercice principal Maths Approfondies 3

On remarque qu'à une station de métro londonien, la durée moyenne entre deux métros consécutifs est de 10 minutes.

On fixe un instant 0, on note X_1 la variable aléatoire égale à la durée (en minutes) entre l'instant 0 et le passage du premier métro et, pour tout entier naturel k non nul, X_k la variable aléatoire égale à la durée (en minutes) entre le passage du k -métro et du suivant. On suppose que $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ forme une famille de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi exponentielle.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note S_k le temps (en minutes) de passage du k -ème métro depuis l'instant 0 (on convient que $S_0 = 0$). Pour un instant $t > 0$, on note N_t la variable aléatoire égale au nombre de métros qui sont passés entre l'instant 0 et l'instant t (compris).

1. Cours : loi de somme de n variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1.
2. Quel est le paramètre de la loi exponentielle suivies par les variables aléatoires $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$?
3. Écrire le code d'une fonction en Python prenant en argument un flottant $t > 0$ (inutile de vérifier cette condition) et simulant la variable aléatoire N_t .
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que S_n est une variable à densité dont on déterminera une densité.
5. Montrer que la variable aléatoire N_t suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.
6. Un passager arrive à la station à l'instant $t > 0$ et attend le prochain métro. On note A_t la variable aléatoire égale à son temps d'attente (en minutes).
 - (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{E}(A_t \mid S_n < t \leq S_{n+1}) = 10n + 10 - t$.
 - (b) En déduire que le temps moyen d'attente du métro est de 10 minutes.

Solution :

1. Cours : cf programme EC maths approfondies page 16.
2. D'après l'énoncé, la loi est d'espérance $\frac{1}{\lambda} = 10$; son paramètre est donc $\lambda = \frac{1}{10}$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, X_k \hookrightarrow \mathcal{E}\left(\frac{1}{10}\right).$$

3.

```

import numpy.random as rd
def simule_N(t):
    n = 0
    s = 0
    while s < t:
        s += rd.exponential(10)
        n += 1
    return n-1

```

4. On trouve immédiatement que $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Puisque :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lambda X_k \hookrightarrow \mathcal{E}(1),$$

la variable aléatoire λS_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes (par le lemme des coalitions) suivant la loi $\mathcal{E}(1) = \gamma(1)$. La variable aléatoire λS_n suit donc la loi $\gamma(n)$ par stabilité de la loi γ pour la somme. On montre sans difficulté que la variable aléatoire S_n est à densité, de densité donnée par :

$$f_n : x \mapsto \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{]0, +\infty[}(x).$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que $[N_t = n] = [S_n \leq t < S_{n+1}] = [S_n \leq t] \setminus [S_{n+1} \leq t]$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(N_t = n) &= \mathbb{P}(S_n \leq t) - \mathbb{P}(S_n \leq t, S_{n+1} \leq t) \\
 &= \mathbb{P}(S_n \leq t) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leq t) \\
 &= \int_{-\infty}^t f_n(x) dx - \int_{-\infty}^t f_{n+1}(x) dx \\
 &= \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} dx - \int_0^t \frac{\lambda(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x} dx.
 \end{aligned}$$

En intégrant par parties la première intégrale (les fonctions $u : x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$ et $v : x \mapsto \frac{\lambda^{n-1} x^n}{n!}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, t]$), on trouve que :

$$\int_0^t \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[\frac{\lambda^{n-1} x^n}{n!} \lambda e^{-\lambda x} \right]_0^t + \int_0^t \frac{\lambda^{n-1} x^n}{n!} \lambda^2 e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t} + \int_0^t \frac{(\lambda x)^n}{n!} \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

On en déduit que $\mathbb{P}(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$ puis que N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt .

6. (a) Sous l'hypothèse que l'événement $[S_n < t \leq S_{n+1}]$ est réalisé, $A_t = S_{n+1} - t$. Ainsi :

$$\mathbb{E}(A_t \mid S_n < t \leq S_{n+1}) = \mathbb{E}(S_{n+1} - t) = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{E}(X_k) - t = 10n + 10 - t.$$

- (b) Remarquons que $([S_n < t \leq S_{n+1}])_{n \in \mathbb{N}}$ forme un système (quasi-)complet d'événements. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^N \mathbb{P}(S_n < t \leq S_{n+1}) \mathbb{E}(A_t \mid S_n < t \leq S_{n+1}) &= \sum_{n=0}^N \mathbb{P}(N_t = n) [10n + 10 - t] \\
 &= 10 - t + 10 \sum_{n=1}^N n \mathbb{P}(N_t = n) \\
 &= -t + 10 + \sum_{n=1}^N \frac{\lambda^{n-1} t^n}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \\
 &= -t + 10 + t \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 10.
 \end{aligned}$$

Puisque A_t est une variable aléatoire positive et puisque la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(S_n < t \leq S_{n+1}) \mathbb{E}(A_t \mid S_n < t \leq S_{n+1})$$

converge, la variable aléatoire X_t admet une espérance, égale à 10.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 3

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes et non certaines. On pose $Z = X + Y$ et on suppose que $\mathbb{P}(X = 0) < \mathbb{P}(Y = 0)$ et que $\mathbb{P}(Z > 4) = 0$ et $\mathbb{P}(Z = 1) = \mathbb{P}(Z = 3) = 0$ et que

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \frac{1}{3}, \quad \mathbb{P}(Z = 2) = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(Z = 4) = \frac{1}{6}.$$

On définit la fonction

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)t^k, \quad t \in \mathbb{R}.$$

On définit de même G_Y et G_Z .

1. Montrer que G_X , G_Y et G_Z sont des polynômes en t et que

$$G_Z = G_X G_Y.$$

2. Trouver les lois de X et de Y .
-

Solution :

1. Puisque $\mathbb{P}(Z > 4) = 0$ on a forcément $P(X > 4) = P(Y > 4) = 0$. Ainsi, les sommes définissant G_X , G_Y et G_Z sont des sommes finies (uniformément en t) et les trois fonctions sont polynomiales. On a par indépendance de X et Y :

$$\begin{aligned} G_Z(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X + Y = k)t^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\ell \geq 0, m \geq 0 \text{ et } m+\ell=k} \mathbb{P}(X = m) \cap \mathbb{P}(Y = \ell)t^k, \\ &= \left(\sum_{m=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = m)t^m \right) \left(\sum_{\ell=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = \ell)t^\ell \right) \\ &= G_X(t)G_Y(t) \end{aligned}$$

(on observe que toutes les sommes impliquées ici sont finies, et qu'on peut donc les permuter).

2. Les fonctions G_X , G_Y et G_Z sont des polynômes. De plus $G_Z = G_X G_Y$. Ainsi, G_X et G_Y divisent G_Z . De plus,

$$G_Z(t) = \frac{1}{6}(2 + 3t^2 + t^4) = \frac{1}{6}(t^2 + 1)(t^2 + 2). \quad (1)$$

Donc $G_X(t) = \frac{1}{2}(t^2 + 1)$ et $G_Y(t) = \frac{1}{3}(t^2 + 2)$ car $P(X = 0) \leq P(Y = 0)$ ($G_X \neq 1$, $G_Y \neq 1$ car X et Y ne sont pas certaines).

SUJET Maths Approfondies 4

Exercice principal Maths Approfondies 4

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté dans la base canonique par la matrice A .

1. Question de cours : caractérisation des endomorphismes diagonalisables à l'aide des dimensions des sous-espaces propres.
2. (a) Ecrire une fonction Python prenant en arguments deux vecteurs de taille 3 et renvoyant un booléen (**True** ou **False**) indiquant s'ils sont colinéaires. *On pourra représenter les vecteurs par des types array.*
(b) Ecrire une fonction Python prenant en argument un vecteur de taille 3 et renvoyant un booléen indiquant s'il est vecteur propre de A .
3. (a) Vérifier que les vecteurs $(-1, 2, 0)$, $(0, 1, -1)$ et $(1, 0, -1)$ sont des vecteurs propres de f .
(b) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
4. (a) Ecrire un programme Python permettant de déterminer le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers compris entre -10 et 10 (bornes incluses).
(b) Pour N un entier naturel non nul, calculer le nombre de vecteurs propres de A dont les coefficients sont des entiers compris entre $-N$ et N (bornes incluses).
5. Soit N un entier naturel non nul. Une expérience consiste à choisir au hasard de manière indépendante N vecteurs à coefficients entiers dans $\llbracket -N, N \rrbracket^3$.
(a) Quelle est la probabilités p_N d'obtenir au moins un vecteur propre de A parmi ces N vecteurs ?
(b) Quelle est la limite de p_N quand N tend vers $+\infty$.

Solution :

1. EC2p8

2. (a) _____

```
import numpy as np
def colineaires(U,V):
    matrice = np.array([U,V])
    return np.linalg.matrix_rank(matrice)<2
```

(b) On propose (pas la seule solution).

```
def vp_A(U):
    if U==[0,0,0]:
        return False
    else:
        AU=[-4*U[0]-3*U[1]-3*U[2],2*U[1],6*U[0]+3*U[1]+5*U[2]] # ou np.dot(A,U)
        return colineaires(AU,U)
```

3. (a) On calcule :

- $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$: vecteur propre associé à la valeur propre 2
- $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: vecteur propre associé à la valeur propre 2
- $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$: vecteur propre associé à la valeur propre -1

(b) Les deux premiers vecteurs forment une famille libre ; l'espace propre associé à la valeur propre 2 est de dimension 2. Donc, en utilisant la question de cours, f est diagonalisable.

4. (a) _____

```
def compte_vp_A():
    compteur = 0
    for x in range(-10,11):
        for y in range(-10,11):
            for z in range(-10,11):
                if vp_A([x,y,z]):
                    compteur +=1
    return compteur
```

(b) Pour la valeur propre -1, on compte les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ -k \end{pmatrix}$ avec

$$k \in \llbracket -N, N \rrbracket \text{ et } k \neq 0.$$

Il y en a $2N$.

Pour la valeur propre 2, on compte les vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} \alpha \\ -2\alpha + \beta \\ -\beta \end{pmatrix}$

avec contraintes :

- Première contrainte : $-N \leq \alpha \leq N$.
- Deuxième contrainte : $-N \leq \beta \leq N$.
- Troisième contrainte : $-N \leq -2\alpha + \beta \leq N$, c'est-à-dire $-N + 2\alpha \leq \beta \leq N + 2\alpha$.

Pour connaître la quantité totale, on distingue les cas selon le signe de α .

— Si $\alpha < 0$, la troisième contrainte donne $-N \leq \beta \leq N + 2\alpha$.

Il y a donc $N + 2\alpha - (-N) + 1 = 2N + 2\alpha + 1$ valeurs de β possibles.

— Si $\alpha = 0$, il y a $2N$ valeurs de β possibles.

— Si $\alpha > 0$, la troisième contrainte donne $-N + 2\alpha \leq \beta \leq N$ et il y a $2N - 2\alpha + 1$ valeurs de β .

$$\text{Au total il y a : } \sum_{\alpha=-N}^{-1} (2N + 2\alpha + 1) + 2N + \sum_{\alpha=1}^N (2N - 2\alpha + 1) =$$

$$2 \sum_{\alpha=1}^N (2N - 2\alpha + 1) + 2N$$

$$\boxed{4N + 2N^2 = 2N(N + 2)}$$

5. (a) Pour un vecteur : $p_v = \frac{2N(N + 2)}{(2N + 1)^3}$.

Par indépendance, la probabilités qu'aucun vecteur ne soit propre est :

$$\boxed{p_N = 1 - \left(1 - \frac{2N(N + 2)}{(2N + 1)^3}\right)^N}$$

(b) $\frac{2N(N + 2)}{(2N + 1)^3} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2N^2}{8N^3}$ donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2N(N + 2)}{(2N + 1)^3} = 0$

Ainsi, $N \ln \left(1 - \frac{2N(N + 2)}{(2N + 1)^3}\right) \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{4}$ et $\boxed{\lim_{N \rightarrow +\infty} p_N = e^{-\frac{1}{4}}}$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 4

Un élève prépare trois concours. Il a une probabilité $p \in [0, 1]$ de réussite pour chacun des trois. Il pense que s'il se présente aux trois concours, il a une probabilité $3p$ d'intégrer. Trouver les valeurs de p pour lesquelles l'erreur que fait cet élève soit inférieure à 10%.

Solution :

1. Soit X le nombre de succès de l'élève au concours. X est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres 3 et p . L'événement A considéré est l'événement ($X \geq 1$).

On calcule $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) = 1 - (1 - p)^3$.

Notons E l'erreur commise par l'élève. On a $E = 3p - \mathbb{P}(A) = p^2(3 - p)$ (l'erreur est effectivement positive!). De plus, $E \leq 0.1 \iff p^2(3 - p) \leq 0.1$.

Considérons la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(p) := p^3 - 3p^2 + 0.1$. f est dérivable, et $f'(p) = 3p(p - 2) < 0$ pour $p \in]0, 1]$. On trace le tableau de variations :

p	0	p_0	1
$f'(p)$	0	—	
$f(p)$	0.1	↘ 0	↘ -1.9

f , étant strictement décroissante, réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[f(1), f(0)] = [-1.9, 0.1]$. f est aussi continue, donc par théorème des valeurs intermédiaires, f atteint une fois et une seule la valeur 0, en p_0 . Ainsi, l'ensemble des valeurs p solution est l'intervalle $[0, p_0]$.

2. *Question subsidiaire* : Proposer un programme Python pour déterminer une valeur approchée de p_0 . (les examinateurs donneront l'encadrement une fois le programme rédigé, puis pourront demander d'interpréter le résultat).

On peut par exemple proposer un algorithme de dichotomie.

```
def dichotomie(f, a, b, e):  
    delta = 1  
    while delta > e:  
        m = (a + b) / 2
```

```

        delta = abs(b - a)
        if f(m) == 0:
            return m
        elif f(a) * f(m) > 0:
            a = m
        else:
            b = m
    return a, b

print(dichotomie(lambda p: p**3 - 3*(p**2) + 0.1, 0, 1, 1e-3))
>>> (0.1884765625, 0.18896484375)

```

En conclusion, si l'élève a entre 0 et 18% de chances de réussir l'un des concours, il triple ses chances en présentant les 3 concours (avec 10% d'erreur au plus).

SUJET Maths Approfondies 5

Exercice principal Maths Approfondies 5

1. Question de cours : énoncer les théorèmes de comparaison pour les intégrales généralisées.

Soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t) dt$$

2. Déterminer l'ensemble de définition de f .
3. (a) Montrer que f est positive et préciser sa monotonie.
(b) En déduire que f admet une limite à droite et à gauche en 0.
(c) Montrer que l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$ est convergente et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \leq \frac{\pi}{2} - f(x) \leq -x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt$$

- (d) En déduire la limite de f à droite en 0 .
4. Former une relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$ pour tout $x > -1$.
5. On pose pour $x > 0$:

$$\varphi(x) = xf(x)f(x-1)$$

Montrer que :

$$\forall x > 0 \quad \varphi(x+1) = \varphi(x)$$

Calculer $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

6. Déterminer un équivalent à f en -1^+ .

Solution :

1. Question de cours : p18 EC1 maths approfondies
2. Déterminer l'ensemble de définition de f .

$$\text{Soit } \varphi : \begin{array}{l} \left] 0, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ t \mapsto \sin t^x = e^{x \ln(\sin t)} \end{array}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi \in C^0\left(\left]0, \frac{\pi}{2}\right]\right).$$

$$\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^x, \text{ or } \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^x dt \text{ converge si et seulement si } x > -1.$$

$$\text{Par comparaison, } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^x(t) dt \text{ converge ssi } x > -1.$$

$$f \text{ est définie sur }]-1, +\infty[.$$

3. (a) *Montrer que f est positive et préciser sa monotonie.*

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \varphi(t) \geq 0.$$

$$\text{Comme } \frac{\pi}{2} > 0, \text{ par positivité de l'intégrale, } f \text{ est positive sur }]-1, +\infty[.$$

$$\text{Soit } (x, y) \in]-1, +\infty[^2 \text{ tels que } x < y$$

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \sin^x(t) \geq \sin^y(t)$$

On conclut encore par positivité de l'intégrale que f est décroissante.

(b) *En déduire que f admet une limite à droite et à gauche en 0*
Conséquence de la monotonie.

(c) *Montrer que l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$ est convergente et que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \leq \frac{\pi}{2} - f(x) \leq x \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\ln(\sin(t)) dt$$

$$t \mapsto \ln(\sin t) \text{ est continue et négative sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et}$$

$$\ln(\sin t) = \ln(t + o(t)) = \ln(t) + \ln(1 + o(1)) = \ln(t) + o(1) \underset{0}{\sim} \ln(t)$$

$$\text{Or } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(t) dt \text{ converge donc par comparaison } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt \text{ est convergente}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \leq f(0) - f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - e^{x \ln(\sin t)}) dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} -x \ln(\sin t) dt$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad 0 \leq \frac{\pi}{2} - f(x) \leq -x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)) dt$$

(d) *En déduire la limite de f à droite en 0*
Par encadrement, nous obtenons

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} = f(0)$$

4. *Former une relation entre $f(x+2)$ et $f(x)$ pour tout $x > -1$.*

$$\begin{aligned}
f(x+2) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \sin^x(t) dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(t)) \sin^x(t) dt \\
&= f(x) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \overbrace{\cos t \sin^x(t)}^{\uparrow} \underbrace{\cos t}_{\downarrow} dt \\
&= f(x) - \left[\frac{\sin^{x+1}(t)}{x+1} \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{x+1}(t)}{x+1} (-\sin t) dt \\
&= f(x) - \frac{1}{x+1} f(x+2)
\end{aligned}$$

D'où $\boxed{(x+2)f(x+2) = (x+1)f(x)}$

5. On pose pour $x > 0$,

$$\varphi(x) = xf(x)f(x-1)$$

Montrer que

$$\forall x > 0, \varphi(x+1) = \varphi(x)$$

Calculer $\varphi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. $x-1 \in]-1, +\infty[$.

$$\varphi(x+1) = (x+1)f(x+1)f(x) = xf(x-1)f(x) = \varphi(x). \text{ D'où } \varphi(n) = \varphi(1).$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \varphi(1) = 1 \cdot f(1)f(0) = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = \frac{\pi}{2} \left[-\cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi(n) = \frac{\pi}{2}}$

6. Déterminer un équivalent à f en -1^+ .

$$\forall x > 0 \quad \frac{\pi}{2} = xf(x)f(x-1). \text{ Or } f(x) \underset{0^+}{\sim} f(0) = \frac{\pi}{2} \text{ donc } f(x-1) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{x} \text{ d'où}$$

$$\boxed{f(x) \underset{-1^+}{\sim} \frac{1}{x+1}}$$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 5

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que :

$$\forall n \geq 1 : P([X_n = 1]) = P([X_n = -1]) = \frac{1}{2}$$

Pour tout entier non nul n on pose :

$$W_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{k}$$

1. Ecrire un programme **Python** qui prend en entrée un entier n et retourne une réalisation de la variable aléatoire W_n .
2. Montrer que la suite $(E(|W_n|))_{n \geq 1}$ est croissante.
3. En déduire que la suite $(E(|W_n|))_{n \geq 1}$ est convergente.

Solution :

1.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul(n):
    W = 0
    for k in range(1, n+1):
        u = 2 * rd.binomial(1, 0.5) - 1
        W += u/k
    return W
```

2. $W_{n+1} = W_n + \frac{X_{n+1}}{n+1}$ et d'après la formule de l'espérance totale :

$$\begin{aligned} E(|W_{n+1}|) &= E(|W_{n+1}| \mid X_{n+1} = 1) P(X_{n+1} = 1) + E(|W_{n+1}| \mid X_{n+1} = -1) P(X_{n+1} = -1) \\ &= \frac{1}{2} E\left(\left|W_n + \frac{1}{n+1}\right|\right) + \frac{1}{2} E\left(\left|W_n - \frac{1}{n+1}\right|\right) \\ &\geq \frac{1}{2} E(|2W_n|) = E(|W_n|) \end{aligned}$$

par inégalité triangulaire donc la suite $(E(|W_n|))_{n \geq 1}$ est croissante.

3. On a : $0 \leq E(|W_n|) \leq (E(W_n^2))^{1/2}$ du fait que : $V(|W_n|) = E(W_n^2) - (E(|W_n|))^2 \geq 0$.

W_n étant centrée on a :

$$E(W_n^2) = V(W_n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} V(X_k) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$

La suite $(E(|W_n|))_{n \geq 1}$ est donc croissante et majorée et, de ce fait, converge.

SUJET Maths Approfondies 6

Exercice principal Maths Approfondies 6

Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $s \in]0, +\infty[$ les séries

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) \frac{s^k}{k!} \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k)^2 \frac{s^k}{k!}$$

sont absolument convergentes. Dans toute la suite, pour tout $\lambda \in]0, +\infty[$, X_λ désigne une variable aléatoire discrète qui suit une loi de Poisson de paramètre λ et on pose

$$Y_\lambda = \frac{X_\lambda - \lambda}{\lambda}.$$

1. Question de cours : rappeler la loi de Poisson, l'espérance et la variance associées.
2. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, la variable aléatoire $\varphi(X_\lambda)$ admet une espérance et une variance.

On pose dans la suite

$$\forall \lambda \in]0, +\infty[, H(\lambda) = \mathbb{E}(\varphi(X_\lambda)).$$

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \varphi(k) \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

est absolument convergente et en déduire que la variable aléatoire $X_\lambda \varphi(X_\lambda)$ admet une espérance.

4. Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $\varepsilon \in]-1, 1[$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a

$$|(\lambda + \varepsilon)^k - \lambda^k - k\varepsilon\lambda^{k-1}| \leq \frac{1}{2}k(k-1)\varepsilon^2(\lambda + 1)^{k-2}.$$

(on convient que $t^0 = 1$ pour tout $t \in]0, +\infty[$).

5. En déduire que H est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*, H'(\lambda) = \mathbb{E}(\varphi(X_\lambda)Y_\lambda).$$

6. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. En considérant la fonction

$$Q(t) = \mathbb{E}\left((\varphi(X_\lambda) - H(\lambda) + tY_\lambda)^2\right) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R},$$

montrer que

$$\mathbb{V}(\varphi(X_\lambda)) \geq \lambda H'(\lambda)^2.$$

Solution :

1. Voir programme.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{P}(X_\lambda = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

D'après les hypothèses de l'exercice, la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) \mathbb{P}(X_\lambda = k)$$

est absolument convergente. En appliquant le théorème de transfert, on en déduit que $\varphi(X_\lambda)$ admet une espérance et que

$$H(\lambda) = \mathbb{E}(\varphi(X_\lambda)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) \mathbb{P}(X_\lambda = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) \frac{\lambda^k}{k!}.$$

De même $\varphi(X_\lambda)^2$ admet une espérance et donc $\varphi(X_\lambda)$ admet une variance.

3. Soit $s > \lambda$ fixé. On a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \varphi(k) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \right| = \left| \varphi(k) \frac{s^k}{k!} \right| \left(\frac{\lambda}{s} \right)^k k.$$

Etant donné que la série $\sum \varphi(k) \frac{s^k}{k!}$ est absolument convergente, la suite $(\varphi(k) \frac{s^k}{k!})_{k \geq 0}$ converge vers 0 ; elle est donc majorée en valeur absolue par une constante $M > 0$. On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\left| \varphi(k) \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \right| \leq M \left(\frac{\lambda}{s} \right)^k k.$$

La série à droite est absolument convergente. On conclut par comparaison que la série

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

converge absolument et donc converge. Par théorème de transfert on en déduit que la variable aléatoire $X_\lambda \varphi(X_\lambda)$ admet une espérance et

$$\mathbb{E}(X_\lambda \varphi(X_\lambda)) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \varphi(k) \mathbb{P}(X_\lambda = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi(k) \frac{\lambda^k}{(k-1)!}$$

4. L'inégalité est clairement vraie pour $k = 0$ et $k = 1$. Supposons que $k \geq 2$. On considère sur $[-1, 1]$ la fonction

$$h(x) = (\lambda + x)^k, \quad x \in [-1, 1].$$

On a $h(0) = \lambda^k$ et $h'(0) = k\lambda^{k-1}$. De plus

$$\forall x \in [-1, 1], |h''(x)| = k(k-1)|\lambda+x|^{k-2} \leq k(k-1)(|\lambda|+|x|)^{k-2} \leq k(k-1)(|\lambda|+1)^{k-2}.$$

En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, on en déduit que pour tout $\varepsilon \in]-1, 1[$

$$|h(\varepsilon) - h(0) - h'(0)\varepsilon| \leq \frac{1}{2!}k(k-1)(|\lambda|+1)^{k-2}\varepsilon^2.$$

5. Posons $F(\lambda) = e^\lambda H(\lambda)$. On a

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) \frac{\lambda^k}{k!} \\ |F(\lambda + \varepsilon) - F(\lambda) - \varepsilon \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi(k) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}| &= \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi(k) \frac{(\lambda + \varepsilon)^k - \lambda^k - k\varepsilon\lambda^{k-1}}{k!} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{+\infty} |\varphi(k)| \frac{|(\lambda + \varepsilon)^k - \lambda^k - k\varepsilon\lambda^{k-1}|}{k!} \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{k=2}^{+\infty} |\varphi(k)| \frac{(\lambda + 1)^{k-2}}{(k-2)!}. \end{aligned}$$

On montre comme dans la question 3 que la série

$$\sum_{k=2}^{+\infty} |\varphi(k)| \frac{(\lambda + 1)^{k-2}}{(k-2)!}$$

converge. Et on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(\lambda + \varepsilon) - F(\lambda)}{\varepsilon} = \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi(k) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Donc F est dérivable en λ et

$$F'(\lambda) = \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi(k) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Il en résulte que H est aussi dérivable en λ et

$$H'(\lambda) = e^{-\lambda} F'(\lambda) - e^{-\lambda} F(\lambda) = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi(k) \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - H(\lambda)$$

En comparant avec la formule de $\mathbb{E}(X_\lambda \varphi(X_\lambda))$ on obtient :

$$H'(\lambda) = \frac{\mathbb{E}(X_\lambda \varphi(X_\lambda))}{\lambda} - \mathbb{E}(\varphi(X_\lambda)) = \mathbb{E}(Y_\lambda \varphi(X_\lambda)),$$

d'où le résultat.

6. Observons que pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Q(t) &= \mathbb{E}(Y_\lambda^2)t^2 + 2\mathbb{E}((\varphi(X_\lambda) - H(\lambda))Y_\lambda)t + \mathbb{E}\left((\varphi(X_\lambda) - H(\lambda))^2\right) \\ &= \mathbb{V}(Y_\lambda)t^2 + 2\mathbb{E}(\varphi(X_\lambda)Y_\lambda)t + \mathbb{V}(\varphi(X_\lambda)), \\ &= \frac{1}{\lambda}t^2 + 2H'(\lambda)t + \mathbb{V}(\varphi(X_\lambda)), \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $\mathbb{E}(Y_\lambda) = 0$. Comme Q est un trinôme qui ne change pas de signe, son discriminant est négatif, c'est-à-dire

$$H'(\lambda)^2 \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{V}(\varphi(X_\lambda)).$$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 6

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer qu'il existe α dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que :

$$f\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) = f(\alpha)$$

2. Plus généralement, montrer que pour tout n entier non nul il existe α_n dans $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ tel que :

$$f\left(\alpha_n + \frac{1}{n}\right) = f(\alpha_n)$$

3. Ecrire une fonction Python qui prend en entrée f et n et qui sort une approximation de α_n à 10^{-2} près.

Solution :

1. Soit g telle que

$$g(t) = f\left(t + \frac{1}{2}\right) - f(t)$$

g est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ avec $g(0) = f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0)$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = f(1) - f\left(\frac{1}{2}\right) = -g(0)$
du fait que $f(0) = f(1)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires g s'annule sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et l'existence de α est établie.

2. Soit g_n définie sur $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ par

$$g_n(t) = f\left(t + \frac{1}{n}\right) - f(t)$$

Supposons par l'absurde que g_n ne s'annule pas sur $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ et supposons alors $g_n > 0$ par exemple.

On a alors :

$g\left(\frac{k}{n}\right) > 0$ pour tout k compris entre 0 et $n - 1$.

Ainsi :

$f(1) - f(0) = \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) > 0$ (somme télescopique). Contradiction.

3.

```
def alpha(f,n):
    k=1
    while (f((k+1)/n)-f(k/n))*(f(1/n)-f(0))>0 :
        k+=1
    a=(k-1)/n
    b=k/n
    while b-a>0.01:
        c=(a+b)/2
        if (f(a+1/n)-f(a))*((f(c+1/n)-f(c)))<0:
            b=c
        else :
            a=c
    return a
```

SUJET Maths Approfondies 7

Exercice principal Maths Approfondies 7

On considère deux suites $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$. On suppose toutes ces variables mutuellement indépendantes.

1. Cours : densité de la somme de deux variables aléatoires indépendantes et à densité.
2. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X_n^2 .
3. Soit $x \in]0, 1]$. Montrer la convergence et calculer l'intégrale :

$$h(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{tx - t^2}}.$$

On pourra réaliser le changement de variable $t = \frac{x}{2} (\sin(u) + 1)$.

4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n^2 + Y_n^2$ admet une densité g . Déterminer une expression de $g(x)$ pour tout $x \leq 1$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n = 1$ si $X_n^2 + Y_n^2 \leq 1$ et 0 sinon et $S_n = \frac{4}{n} \sum_{k=1}^n Z_k$.

On admet que $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

- (a) Écrire en Python une fonction prenant en argument un entier n non nul et simulant la variable S_n .
- (b) Montrer que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en probabilité vers une variable dont on déterminera la loi.
- (c) Comment peut-on choisir n pour que S_n soit une approximation de π à 10^{-5} -près avec une probabilité supérieure à 90% ?

Solution :

1. Cours : cf programme EC maths approfondies page 16.
2. On trouve sans difficulté la fonction de répartition de X_n :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X_n^2 \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

On en déduit sans difficulté aussi que X_n^2 est à densité, donnée par :

$$f : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{]0,1]}(x).$$

3. Comme proposé par l'énoncé, on considère la fonction $\varphi : u \mapsto \frac{x}{2} (\sin u + 1)$. On vérifie que φ est $\mathcal{C}^1$ et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Puisque $\varphi\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) =]0, x[$, le théorème du changement de variable assure que l'intégrale $h(x)$ est de même nature que l'intégrale :

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{x}{2} \cos(u) du}{\frac{x}{2} \sqrt{1 - \sin^2(u)}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} du.$$

Puisque cette intégrale converge et vaut π , l'intégrale $h(x)$ converge et vaut π (toujours en vertu du théorème de changement de variable).

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque X_n et Y_n sont indépendantes, X_n^2 et Y_n^2 le sont aussi. De plus, on a montré à la question 2 que X_n^2 et Y_n^2 sont de densité f_n . On en déduit que leur somme $X_n^2 + Y_n^2$ est à densité, donnée par la fonction :

$$g : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t) dt$$

D'après ce qui précède, on trouve que $g(x) = 0$ si $x \leq 0$ et :

$$\forall x \in]0, 1], g(x) = \frac{1}{4} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{tx - t^2}} = \frac{\pi}{4}.$$

5. (a) `import numpy as np`

```
def simule_S(n):
    S = 0
    for k in range(n):
        x, y = np.random.random(), np.random.random()
        if x**2 + y**2 <= 1:
            S += 1
    return 4*S/n
```

- (b) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la variable aléatoire Z_k suit la loi de Bernoulli de paramètre p où :

$$p = \mathbb{P}(X_k^2 + Y_k^2 \leq k) = \int_{-\infty}^1 g(x) dx = \frac{\pi}{4}.$$

Puisque les variables aléatoires $(Z_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ admettent la même espérance et la même variance, la loi faible des grands nombres assure que :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k - \frac{\pi}{4}\right| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(|S_n - \pi| \geq \varepsilon) = 0.$$

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge donc en loi vers une variable presque-sûrement constante égale à π .

(c) On cherche $n \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$\mathbb{P}(|S_n - \pi| \leq 10^{-5}) \geq 90\%,$$

ce qui revient à choisir n tel que :

$$\mathbb{P}(|S_n - \pi| > 10^{-5}) \leq 10\%,$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a :

$$\mathbb{P}(|S_n - \pi| \geq 10^{-5}) \leq \frac{\pi(4 - \pi)}{n \times 10^{-10}}.$$

Il suffit donc de choisir n tel que $\frac{\pi(4 - \pi)}{n \times 10^{-10}} \leq 10^{-1}$, i.e. $n \geq \pi(4 - \pi) \times 10^{11}$.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 7

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on note : $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : M \text{ est semblable à } A\}$.

Que dire de A lorsque $\mathcal{C}(A) = \{A\}$?

Solution :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(A) = \{A\} &\Leftrightarrow \forall P \in GL_n(\mathbb{R}) \quad P^{-1}AP = A \\ &\Leftrightarrow \forall P \in GL_n(\mathbb{R}) \quad AP = PA \quad (*)\end{aligned}$$

- S'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A = \lambda I$ alors vérifie (*).
- Réciproquement si A vérifie (*) alors A commute avec toute matrice inversible et en particulier avec toutes les matrices de la forme :

$$P = I + E_{ij}$$

où : $(E_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ désigne la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$.

On a ainsi, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$A(I + E_{ij}) = (I + E_{ij})A$$

soit

$$AE_{ij} = E_{ij}A$$

En notant $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, il en résulte que :

$$\forall i \neq j \quad a_{ij} = 0 \quad \text{et} \quad \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \quad a_{ii} = a_{jj}$$

et donc A est de la forme $A = \lambda I$.

Bilan :

$$\mathcal{C}(A) = \{A\} \iff A \in \text{Vect}(I)$$

SUJET Maths Approfondies 8

Exercice principal Maths Approfondies 8

L'objectif de cet exercice est de démontrer de deux manières **indépendantes** le résultat suivant :

Pour tout entier $n \geq 2$ et tous réels $x_1, \dots, x_n$ strictement positifs tels que $\sum_{k=1}^n x_k = 1$ on a :

$$(\star) \quad \sum_{k=1}^n \left(x_k + \frac{1}{x_k} \right)^3 \geq n \left(n + \frac{1}{n} \right)^3$$

1. Question de cours : Fonctions convexes .

2. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et f une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I .

On suppose que $X(\Omega) \subset I$ et que les variables aléatoires X et $f(X)$ admettent une espérance.

a) En remarquant que la courbe représentative de la fonction f est au-dessus de toutes ses tangentes établir l'inégalité :

$$f(E(X)) \leq E(f(X))$$

b) En introduisant une variable aléatoire bien choisie en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n \quad \forall (t_1, \dots, t_n) \in [0, 1]^n \quad \text{tel que} \quad \sum_{k=1}^n t_k = 1 : \quad f\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n t_k f(x_k).$$

c) En utilisant le résultat précédent établir alors l'inégalité $(\star)$.

3. Soit F la fonction à n -variables définie sur l'ouvert $U =]0, 1[^n$ par :

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n \left(x_k + \frac{1}{x_k} \right)^3$$

a) Etablir que le n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in U$ est un point critique pour F sous la contrainte linéaire $\sum_{k=1}^n x_k = 1$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \left(x_k + \frac{1}{x_k} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{x_k^2} \right) = \lambda$$

- b) En déduire que, sous cette contrainte linéaire, F admet un unique point critique que l'on précisera.
 c) A l'aide de ce qui précède, établir une nouvelle preuve de l'inégalité $(\star)$.

Solution :

1. Cours

2.a) Pour tout $(x, a) \in I^2$ on a :

$$f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a)$$

et donc : $f(x) \geq f(a) + (x - a)f'(a)$.

En prenant $a = E(X) \in I$ on obtient, par croissance de l'espérance :

$$E(f(X)) \geq f(E(X))$$

du fait que la variable aléatoire $Y = X - E(X)$ est centrée.

b) Si les $x_1, \dots, x_n$ sont 2 à 2 distincts on prend X telle que :

$$X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\} \text{ et } \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad P(X = x_k) = t_k$$

On a alors :

$$E(f(X)) = \sum_{k=1}^n t_k f(x_k) \text{ at } E(X) = \sum_{k=1}^n t_k x_k$$

d'où l'inégalité attendue.

Si les $x_1, \dots, x_n$ ne sont pas 2 à 2 distincts on "regroupe" les t_j et on a bien le resultat d'après le cas précédent.

c) On applique le résultat précédant à la fonction convexe f donnée, pour tout $t \in]0, 1[$ par

$$f(t) = \left(t + \frac{1}{t}\right)^3$$

$$\left(f'(t) = 3\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 \text{ et } f''(t) = \frac{6}{t^3}\left(t + \frac{1}{t}\right)^2 + 6\left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2\left(t + \frac{1}{t}\right) > 0\right)$$

$$\text{On obtient : } f(\bar{x}_n) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) \text{ avec } \bar{x}_n = \frac{1}{n} \text{ et donc } f(\bar{x}_n) = \left(n + \frac{1}{n}\right)^3.$$

L'inégalité $(\star)$ en résulte.

3.a) Posons $g(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$.

$\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in U$ est un point critique de F sous la contrainte linéaire $g(\vec{x}) = 1$ lorsque :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R} / \nabla F(\vec{x}) = \alpha \nabla g(\vec{x})$$

Or, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a :

$$\partial_k F(\vec{x}) = 3 \left(1 - \frac{1}{x_k^2} \right) \left(x_k + \frac{1}{x_k} \right)^2$$

et

$$\partial_k g(\vec{x}) = 1.$$

La propriété attendue en résulte (en posant $\lambda = \frac{\alpha}{3}$).

b) La fonction $g : t \mapsto \left(1 - \frac{1}{t^2} \right) \left(t + \frac{1}{t} \right)^2$ réalise une bijection croissante de $]0, 1[$ sur $] -\infty, 0[$ du fait que :

$$g'(t) = f''(t) > 0 \quad (\text{calcul en 2c.})$$

Il en résulte que si $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ est un point critique de F sous la contrainte $x_1 + \dots + x_n = 1$ alors : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad x_k = \frac{1}{n}$.

Bilan : Sous cette contrainte l'unique point critique est

$$\vec{x} = \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$$

3c) On remarque que $F(x_1, \dots, x_n)$ tend vers $+\infty$ lorsque l'un des x_k tend vers 0 . Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que, sous cette contrainte linéaire, F atteint un minimum global sur le compact $K_\epsilon = [\epsilon, 1 - \epsilon]^n \cap \{(x_1, \dots, x_n) \in U / x_1 + \dots + x_n = 1\}$.

D'après ce qui précède ce minimum est atteint en $\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n} \right)$ et puisque $F\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) =$

$n \left(n + \frac{1}{n} \right)^3$ l'inégalité (*) en résulte.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 8

1. Soit $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que P définisse une fonction injective, respectivement surjective sur $\mathbb{R}$.
2. On définit une fonction sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par $M \mapsto P(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que cette fonction n'est jamais injective si le degré de P est supérieur à 2.

Solution :

1. $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est injective ssi P' est de signe constant, donc les racines réelles de P' sont de multiplicité paire. $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est surjective ssi le degré de P est impair.
2. On commence par remarquer que si P est injectif sur $\mathbb{R}$, P est injectif sur les matrices diagonales, donc sur les matrices symétriques. On cherche alors un exemple sur les matrices anti-symétriques $M = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}$. Quitte à décaler par une constante, il suffit de trouver deux matrices M_1, M_2 telles que $P(M_1) = P(M_2) = 0$. Tout polynôme admet des facteurs de degré 2, il suffit de considérer $P(X) = X^2 + aX + b$. L'équation $P(M) = 0$ donne

$$x^2 - y^2 + ax + b = 0, \quad y(2x + a) = 0$$

Si le discriminant de P est < 0 , on a alors deux solutions pour $x = -a/2$ et y les deux racines de $-a^2/4 + b$. Si $P(X) = (X - \alpha)^2$, on a en plus la matrice diagonale $M = \alpha I_2$, la matrice $M = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ qui est annulée par P . Enfin si $P(X) = (X - \alpha)(X - \beta)$, $\alpha \neq \beta$, on prend $M = \alpha I_2$ et βI_2 .

SUJET Maths Approfondies 9

Exercice principal Maths Approfondies 9

Soit f une fonction de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ continue.

1. Question de cours : rappeler l'inégalité des accroissements finis.
2. Ecrire une fonction **Python** ayant comme paramètres d'entrée deux réels a et b avec $a \leq b$, un entier $N \geq 1$ et une fonction h et qui renvoie une valeur approchée de l'intégrale

$$\int_a^b h(t) dt$$

calculée par la méthode des rectangles à N pas.

3. Soit $x \in [0, 1[$. Montrer que l'intégrale

$$\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt$$

converge.

On pose désormais pour tout $x \in [0, 1[$:

$$F(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt.$$

4. Montrer que la limite $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$ existe et trouver sa valeur ℓ .
On pose désormais $F(1) = \ell$.
5. Montrer que

$$\forall x \in [0, 1], F(x) = \sqrt{1-x} \int_0^1 \frac{f(x + (1-x)s)}{\sqrt{s}} ds.$$

6. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x)}{\sqrt{1-x}} = 2f(1).$$

7. On suppose que f est de classe C^1 sur $[0, 1]$. Montrer que F dérivable en 1 si et seulement si $f(1) = 0$.

Solution :

1. Voir programme.

```
2. import numpy
   def F(a, b, h, N):
       t = numpy.linspace(a, b, N)
       res = 0
       for i in range(0, N):
           res = res + h(t[i])
       return res*(b-a)/N
```

3. La fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}}$ est continue sur $]x, 1]$. De plus, la fonction f est continue sur l'intervalle fermé borné $[0, 1]$. Elle est donc bornée. Soit $M \geq 0$ tel que $\forall t \in [0, 1], |f(t)| \leq M$. On a

$$\forall t \in]x, 1], \left| \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} \right| \leq \frac{M}{\sqrt{t-x}}.$$

Or l'intégrale

$$\int_x^1 \frac{M}{\sqrt{t-x}} dt$$

converge. Donc l'intégrale

$$\int_x^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt$$

converge absolument.

4. Avec les notations de la réponse à la question précédente, on a pour tout $x \in [0, 1[$:

$$0 \leq |F(x)| \leq \int_x^1 \frac{M}{\sqrt{t-x}} dt = 2M[\sqrt{t-x}]_x^1 = 2M\sqrt{1-x}.$$

Par théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = 0$. Donc $\ell = 0$.

5. On vérifie facilement que l'identité est vraie quand $x = 1$. Soit $x \in [0, 1[$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < 1 - x$. En effectuant le changement de variable affine

$$s = \frac{t-x}{1-x},$$

on a $t = x + (1-x)s$ et

$$\int_{x+\varepsilon}^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t-x}} dt = \int_{\frac{\varepsilon}{1-x}}^1 (1-x) \frac{f(x+(1-x)s)}{\sqrt{(1-x)s}} ds = \sqrt{1-x} \int_{\frac{\varepsilon}{1-x}}^1 \frac{f(x+(1-x)s)}{\sqrt{s}} ds.$$

On fait tendre $\varepsilon \rightarrow 0^+$ (les deux intégrales convergent) et on obtient l'identité demandée.

6. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en 1, il existe $\eta > 0$ suffisamment petit tel que

$$\forall t \in [1-\eta, 1], |f(t) - f(1)| \leq \varepsilon.$$

Soit $x \in [1 - \eta, 1]$. On a pour tout $s \in [0, 1]$, $x + (1 - x)s \in [1 - \eta, 1]$ car $x \leq x + (1 - x)s \leq x + (1 - x) = 1$. Il en résulte que

$$\forall s \in [0, 1], |f(x + (1 - x)s) - f(1)| \leq \varepsilon.$$

Or

$$\frac{F(x)}{\sqrt{1-x}} = \int_0^1 \frac{f(x + (1-x)s) - f(1)}{\sqrt{s}} ds + \int_0^1 \frac{f(1)}{\sqrt{s}} ds = 2f(1) + \int_0^1 \frac{f(x + (1-x)s) - f(1)}{\sqrt{s}} ds.$$

Ainsi, pour tout $x \in [1 - \eta, 1]$ on a

$$\left| \frac{F(x)}{\sqrt{1-x}} - 2f(1) \right| \leq \int_0^1 \frac{|f(x + (1-x)s) - f(1)|}{\sqrt{s}} ds \leq \varepsilon \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{s}} ds = 2\varepsilon.$$

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{F(x)}{\sqrt{1-x}} = 2f(1).$$

7. Si F est dérivable en 1, on a

$$\frac{F(x)}{\sqrt{1-x}} = -\sqrt{1-x} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} \rightarrow 0 \text{ quand } x \rightarrow 1.$$

Donc $f(1) = 0$ par unicité de la limite. Réciproquement, si $f(1) = 0$. On a

$$\left| \frac{F(x)}{\sqrt{1-x}} \right| \leq \int_0^1 \frac{|f(x + (1-x)s) - f(1)|}{\sqrt{s}} ds \leq \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| \int_0^1 \frac{|x + (1-x)s - 1|}{\sqrt{s}} ds = C_f(1-x),$$

avec

$$C_f = \sup_{t \in [0,1]} |f'(t)| \int_0^1 \frac{|s-1|}{\sqrt{s}} ds.$$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = 0.$$

On en déduit que F est dérivable à gauche en 1 et $F'(1) = 0$.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 9

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2 définies sur un même espace probabilisé. Montrer que la matrice $\Gamma = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont positives.

À quelle condition nécessaire et suffisante sur les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ les valeurs propres sont-elles toutes strictement positives ?

Solution :

La matrice Γ est évidemment symétrique réelle donc diagonalisable.

Aide possible pour la suite : calculer $U^T \Gamma U$ de deux manières différentes.

Soit λ une valeur propre de Γ et $U = (u_1 \dots u_n)^T$ un vecteur propre associé. On calcule $U^T \Gamma U$ de deux manières. D'abord $U^T \Gamma U = \lambda U^T U = \lambda \|U\|^2$, mais aussi :

$$U^T \Gamma U = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i u_j \text{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \text{Cov}(u_i X_i, u_j X_j) = \mathbb{V}(u_1 X_1 + \dots u_n X_n).$$

$$\text{Ainsi } \lambda = \frac{\mathbb{V}(u_1 X_1 + \dots u_n X_n)}{\|U\|^2} \geq 0.$$

Remarquons que $\lambda = 0$ si, et seulement si $V(u_1 X_1 + \dots u_n X_n) = 0$, i.e. si, et seulement si, $u_1 X_1 + \dots u_n X_n$ est constante presque-sûrement.

On en déduit donc que les valeurs propres de Γ sont toutes strictement positives si, et seulement si, toute combinaison linéaire des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ n'est pas constante presque-sûrement.

SUJET Maths Approfondies 10

Exercice principal Maths Approfondies 10

Cet exercice traite de certains liens entre une variable aléatoire et des transformations affines de celle-ci et est composé de questions en grande partie indépendantes. Dans l'exercice toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Dans la suite c désigne un réel **non nul** et a un réel non-nul différent de 1 et de -1.

1. Question de cours : Théorème central limite.

2. Soit $c \in \mathbb{R}$.

- a) Donner un exemple de variable aléatoire X quasi-certaine telle que X et $c - X$ suivent la même loi.
- b) Donner un exemple de variable aléatoire X bornée et à densité telle que X et $c - X$ suivent la même loi.
- c) Donner un exemple de variable aléatoire X non-bornée et à densité telle que X et $c - X$ suivent la même loi.
- d) Donner un exemple de variable aléatoire X n'admettant pas d'espérance telle que X et $c - X$ suivent la même loi.

3. On se propose de montrer dans cette question qu'il n'existe pas de variable aléatoire X telle que X et $c + X$ suivent la même loi.

On suppose par l'absurde qu'une telle variable aléatoire X existe et on note F sa fonction de répartition.

- a) Etablir, pour tout entier naturel n et tout réel t , l'égalité : $F(t) = F(t - nc)$.
- b) En déduire une contradiction et conclure.

4. On suppose dans cette question qu'il existe une variable aléatoire X qui suit la même loi que la variable aléatoire $aX + c$. On pose $\alpha = \frac{c}{1-a}$ et $Y = X - \alpha$.

- a) Etablir que les variables aléatoires Y et aY suivent la même loi.
- b) Montrer que, pour tout $t > 0$, on a : $P(|Y| \geq t) = 0$.
- c) Que peut-on en déduire ?

5. Dans cette question on suppose que la variable aléatoire X est telle que, pour tout entier n non nul et tout n -échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de X , il existe $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ tels que les variables aléatoires $X_1 + \dots + X_n$ et $a_n X + b_n$ suivent la même loi.

Etablir que si X admet une variance non nulle alors X suit une loi normale.

Solution :

1. Cours.

2. a) $X = \frac{c}{2}$ convient.

b) Toute v.a. de densité symétrique par rapport à $\frac{c}{2}$ convient. Ainsi, par exemple, $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, c])$ convient.

c) $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\frac{c}{2}, 1\right)$ convient par exemple .

d) X ayant pour densité $f(x) = \frac{\pi^{-1}}{1 + (x - \frac{c}{2})^2}$ convient (ou tout autre densité symétrique par rapport à $\frac{c}{2}$ qui décroît à la vitesse de $k \times \frac{1}{x^2}$).

3.a) Pour tout réel t on a :

$$F(t) = P(X \leq t) = P(c + X \leq t) = P(X \leq t - c) = F(t - c)$$

et ainsi, par un raisonnement par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad F(t) = F(t - nc)$$

b) En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient (du fait que $c \neq 0$) :

$$F = 0 \text{ si } c > 0$$

$$F = 1 \text{ si } c < 0$$

Dans le deux cas F n'est pas une fonction de répartition et donc :

il n'existe pas de v.a. X telle que $X \stackrel{loi}{\sim} c + X$.

4. a) $X \stackrel{loi}{\sim} aX + c$ et $\alpha = a\alpha + c$ d'où, en soustrayant : $X - \alpha \stackrel{loi}{\sim} a(X - \alpha)$.

Bilan :

$$Y \stackrel{loi}{\sim} aY$$

b) Soit $t > 0$. On a :

$$P(|Y| \geq t) = P(|aY| \geq t) = P\left(|Y| \geq \frac{t}{|a|}\right)$$

et par un raisonnement par récurrence sur l'entier m :

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad P(|Y| \geq t) = P\left(|Y| \geq \frac{t}{|a|^m}\right)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ on $-\infty$ selon la position de $|a|$ par rapport à 1 on obtient :

$$\forall t > 0 \quad P(|Y| \geq t) = 0$$

c) On en déduit que $Y = 0$ p.s et donc :

$$\text{si } X \stackrel{\text{loi}}{\sim} aX + c \text{ alors } X = \frac{c}{1-a} \text{ p.s.}$$

5. Posons $m = E(X)$ et $\sigma^2 = V(X) > 0$. On a alors :

$$E(X_1 + \dots + X_n) = E(a_n X + b_n) \Leftrightarrow nm = a_n m + b_n.$$

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(a_n X + b_n) \Leftrightarrow n\sigma^2 = a_n^2 \sigma^2.$$

D'où nécessairement : $a_n = \sqrt{n}$ et $b_n = (n - \sqrt{n})m$.

Il s'ensuit que :

$$\frac{X_1 + \dots + X_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \text{ suit la même loi que } \frac{X - m}{\sigma}$$

D'après le théorème central limite on a donc :

$$\frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

D'où en conclusion :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 10

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Montrer que l'endomorphisme :

$$\phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \phi_A(M) = AM$$

est diagonalisable.

Solution :

On commence par remarquer que si (v_i) est une base de $\mathbb{R}^n$ alors $(v_i {}^t v_j)$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: c'est clair pour la base canonique (e_i) et pour une base quelconque, on a $v_i {}^t v_j = P e_i {}^t e_j {}^t P$ où P est la matrice de passage, en notant que $M \rightarrow P M {}^t P$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si on considère une base de vecteurs propres (v_i) de A alors $(v_i {}^t v_j)$ est une base de vecteurs propres de ϕ_A .

SUJET Maths Approfondies 11

Exercice principal Maths Approfondies 11

Soit D la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$D = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha\beta - \gamma^2 \geq 0 \text{ et } \alpha + \beta \geq 0\}.$$

Considérons maintenant les parties de $\mathbb{R}^2$:

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| < 1 \text{ et } |x-y| < 1\}, \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x+y| \leq 1 \text{ et } |x-y| \leq 1\},$$

et $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 vérifiant

$$a\partial_{1,1}^2 f(x, y) + b\partial_{2,2}^2 f(x, y) + 2c\partial_{1,2}^2 f(x, y) + d\partial_1 f(x, y) + e\partial_2 f(x, y) < 0 \text{ pour tout } (x, y) \in U,$$

où a, b, c, d et e sont des constantes réelles avec $(a, b, c) \in D$.

1. Question de cours : rappeler les conditions nécessaires d'ordre 1 et 2 pour qu'une fonction f admette un minimum local en un point x_0 dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que B est borné.
3. Montrer que $a \geq 0$ et $b \geq 0$.
4. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in D$. Montrer que

$$\alpha a + \beta b + 2\gamma c \geq 0.$$

5. Justifier pourquoi il existe au moins un point $(x_0, y_0) \in B$ tel que

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \text{ pour tout } (x, y) \in B$$

6. Montrer que si $(x_0, y_0) \in U$ alors nécessairement

$$(\partial_{1,1}^2 f(x_0, y_0), \partial_{2,2}^2 f(x_0, y_0), \partial_{1,2}^2 f(x_0, y_0)) \in D.$$

7. En déduire que nécessairement $(x_0, y_0) \notin U$.

Solution :

1. Voir programme.

2. Soit $(x, y) \in B$. On pose $u = x + y$ et $v = x - y$. On a

$$|x| = \left| \frac{u+v}{2} \right| \leq \frac{1}{2}(|u| + |v|) \leq 1.$$

$$|y| = \left| \frac{u-v}{2} \right| \leq \frac{1}{2}(|u| + |v|) \leq 1.$$

Donc B est borné.

3. On a $ab \geq c^2$. Donc a et b sont du même signe. Puisque $a + b \geq 0$, on en déduit que $a \geq 0$ et $b \geq 0$.
4. Si $a = 0$, on a forcément $c = 0$ et $\alpha a + \beta b + 2\gamma c = \beta b \geq 0$ car $b \geq 0$ et $\beta \geq 0$. De même si $\alpha = 0$. Supposons maintenant que $a > 0$ et $\alpha > 0$. On a

$$b \geq \frac{c^2}{a} \text{ et } \beta \geq \frac{\gamma^2}{\alpha}.$$

D'où

$$\alpha a + \beta b + 2\gamma c \geq \alpha a + \frac{\gamma^2}{\alpha} \cdot \frac{c^2}{a} + 2\gamma c = \alpha a \left(1 + \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \cdot \frac{c^2}{a^2} + 2 \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{c}{a} \right) = \alpha a \left(\frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{c}{a} + 1 \right)^2 \geq 0.$$

5. f est une fonction continue sur le fermé borné B . Elle est donc bornée et atteint ses bornes.
6. Si $(x_0, y_0) \in U$ alors nécessairement $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ et les valeurs propres de la hessienne

$$\begin{pmatrix} \partial_{1,1}^2 f(x_0, y_0) & \partial_{1,2}^2 f(x_0, y_0) \\ \partial_{1,2}^2 f(x_0, y_0) & \partial_{2,2}^2 f(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

sont positives. Or la somme de ces deux valeurs propres est égale à la trace de cette matrice

$$0 \leq \lambda_1 + \lambda_2 = \partial_{1,1}^2 f(x_0, y_0) + \partial_{2,2}^2 f(x_0, y_0).$$

De même leur produit doit être positif :

$$0 \leq \lambda_1 \lambda_2 = \partial_{1,1}^2 f(x_0, y_0) \partial_{2,2}^2 f(x_0, y_0) - (\partial_{1,2}^2 f(x_0, y_0))^2.$$

D'où le résultat demandé.

7. On raisonne par l'absurde. Si $(x_0, y_0) \in U$, alors $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ et on a

$$(\partial_{1,1}^2 f(x_0, y_0), \partial_{2,2}^2 f(x_0, y_0), \partial_{1,2}^2 f(x_0, y_0)) \in D.$$

Il résulte d'après la question 4 que

$$a \partial_{1,1}^2 f(x_0, y_0) + b \partial_{2,2}^2 f(x_0, y_0) + 2c \partial_{1,2}^2 f(x_0, y_0) \geq 0.$$

Cette inégalité contredit l'hypothèse sur f puisque

$$\begin{aligned} 0 &> a \partial_{1,1}^2 f(x_0, y_0) + b \partial_{2,2}^2 f(x_0, y_0) + 2c \partial_{1,2}^2 f(x_0, y_0) + d \partial_1 f(x_0, y_0) + e \partial_2 f(x_0, y_0) \\ &= a \partial_{1,1}^2 f(x_0, y_0) + b \partial_{2,2}^2 f(x_0, y_0) + 2c \partial_{1,2}^2 f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Exercice sans préparation Maths Approfondies 11

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.

Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$.

Pour tout entier non nul n on pose :

$$Y_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) X_k$$

Etudier la convergence en probabilité de la suite $(Y_n)_{n \geq 1}$.

Solution :

Posons $I = \int_0^1 f(x)dx$ et $J = \int_0^1 f^2(x)dx$. On a :

$$\begin{aligned} E(Y_n) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) E(X_k) = p \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p \cdot I \\ V(Y_n) &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n f^2\left(\frac{k}{n}\right) V(X_k) = \frac{p(1-p)}{n} \underbrace{\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f^2\left(\frac{k}{n}\right) \right)}_{\rightarrow J} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

Montrons alors que : $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} pI$

Soit $\varepsilon > 0$. On a :

$$|Y_n - pI| \leq |Y_n - E(Y_n)| + |E(Y_n) - pI|$$

et donc :

$$[|Y_n - pI| \geq \varepsilon] \subset \left[|Y_n - E(Y_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right] \cup \left[|E(Y_n) - pI| \geq \frac{\varepsilon}{2} \right].$$

Il en résulte que :

$$0 \leq P(|Y_n - pI| \geq \varepsilon) \leq \underbrace{P\left(|Y_n - E(Y_n)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{\leq \frac{V(Y_n)}{(\varepsilon/2)^2} \rightarrow 0} + \underbrace{P\left(|E(Y_n) - pI| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{\text{nul pour } m \text{ grand}}$$

Finalement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|Y_n - pI| \geq \varepsilon) = 0$$

et donc :

$$Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} pI$$

SUJET Maths Approfondies 12

Exercice principal Maths Approfondies 12

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Question de cours : Donner les deux premiers termes des développements limités de $\sin(x)$ et $(1+x)^2$ lorsque x tend vers 0.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Montrer que (u_n) converge vers une limite finie l , que l'on déterminera.
4. Proposer un programme Python `indice(u0,eps)`, qui prend en paramètre le premier terme $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ de la suite et un paramètre ϵ . Ce programme retourne le plus petit entier k tel que $|u_k - l| < \epsilon$.
5. Montrer que la suite $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ converge, et donner la valeur de sa limite.
6. Soit (x_n) une suite réelle de limite $x \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $y_n = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} x_k}{n}$ converge vers x .
7. Déterminer un équivalent de (u_n) , lorsque n tend vers $+\infty$. En déduire la nature de la série de terme général (u_n) .

Solution :

Solution :

1. p20 EC1. $\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ et $(1+x)^2 \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + 2x + o(x)$.
2. Montrons le résultat par récurrence sur n .
Initialisation : $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par hypothèse.
Hérédité : Supposons le résultat vrai pour $n \geq 1$. On a donc que $u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
La fonction sinus étant croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que $u_{n+1} = \sin(u_n) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Considérons la fonction f définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) := \sin(x) - x$. f est dérivable, et $f'(x) = 1 - \cos(x) > 0$ pour $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, f est strictement

croissante sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], f(x) > f(0) = 0$. Cela implique que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) < x$, i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$.

(u_n) étant minorée par 0 et décroissante, donc elle converge vers une limite finie $l \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En passant à la limite, par continuité de la fonction sinus, on en déduit que $\sin(l) = l$. Or, $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) \neq x$. On a donc nécessairement $l = 0$.

4. On propose par exemple le programme suivant :

```
import numpy
def indice(u0,eps):
    u=u0
    k=0
    while abs(u) >= eps:
        u= numpy.sin(u)
        k+=1
    return k

print(indice(1,1e-2))
>>> 29992
```

5. On remarque que $v_n = \frac{u_n^2 - \sin(u_n)^2}{u_n^2 \sin(u_n)^2}$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, on effectue le développement limité des sinus, à l'aide de la question 1).

$$\begin{aligned}
 v_n & \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{u_n^2 - (\sin(u_n))^2}{u_n^2 \sin(u_n)^2} \\
 & \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{u_n^2 - \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)\right)^2}{u_n^4 + o(u_n^4)} \\
 & \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{u_n^2 - u_n^2 \left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right)^2}{u_n^4 + o(u_n^4)} \\
 & \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{u_n^2 - u_n^2 \left(1 - \frac{u_n^2}{3} + o(u_n^2)\right)}{u_n^4 + o(u_n^4)}
 \end{aligned}$$

Où l'on a effectué le développement limité de $(1+x)^2$, avec $x = \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)$ qui tend bien vers 0. lorsque n tend vers $+\infty$. On a donc que

$$\begin{aligned}
 v_n & \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{\frac{u_n^4}{3} + o(u_n^4)}{u_n^4 + o(u_n^4)} \\
 & \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{3} \left(\frac{u_n^4 + o(u_n^4)}{u_n^4 + o(u_n^4)} \right) \\
 & \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Ceci montre que (v_n) converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{3}$.

6. Soit $\epsilon > 0$ fixé, on veut montrer que

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |y_n - x| < \epsilon$$

Puisque que (x_n) converge vers x ,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$$

Or, $\forall n \geq n_0$,

$$\begin{aligned} y_n - x &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} x_k}{n} - x \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} x_k - nx}{n} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n-1} (x_k - x)}{n} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{n_0-1} (x_k - x) + \sum_{k=n_0}^{n-1} (x_k - x)}{n} \end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire, $\forall n \geq n_0, |y_n - x| \leq \frac{1}{n} K_{n_0} + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n-1} |x_k - x|$, où $K_{n_0} =$

$\sum_{k=0}^{n_0-1} |x_k - x|$ est une somme finie, indépendante de n . Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} K_{n_0} = 0$,

donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1, \frac{1}{n} K_{n_0} < \frac{\epsilon}{2}$. De plus, $\frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^{n-1} |x_k - x| < \frac{n - n_0}{n} \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2}$.

Ainsi, en prenant $N = \max\{n_0, n_1\}$, on a que

$$\forall n \geq N, |y_n - x| < \epsilon$$

7. On remarque que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} v_k = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2} = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \right)$ par télesco-

page. Par les deux questions précédentes, on a que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{u_n^2} - \frac{1}{u_0^2} \right) =$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{nu_n^2} = \frac{1}{3}$, donc $nu_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3$, d'où

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$$

La série de terme général u_n est donc divergente, par critère de comparaison des séries à termes positifs.

Pour information, un petit programme similaire a celui de la question 4) pour

la suite $\sqrt{\frac{3}{n}}$ renvoie un indice similaire.

```
def indice2(eps):  
    k=1  
    u= numpy.sqrt(3)  
    while abs(u) >= eps:  
        u= numpy.sqrt(3/k)  
        k+=1  
    return k
```

```
print(indice2(1e-2))  
>>> 30002
```

Exercice sans préparation Maths Approfondies 12

Soient n un entier positif non nul et $(X_1, \dots, X_n)$ un n -échantillon d'une variable aléatoire X de loi à densité uniforme sur l'intervalle $[0, \theta]$ où $\theta \in]0, +\infty[$ est un paramètre inconnu qu'on veut estimer.

1. Proposer un estimateur T_n de θ à l'aide de la moyenne empirique. Vérifier qu'il est sans biais et convergent.
2. On considère un estimateur sans biais M_n de la forme $M_n = c(n)\text{Max}(X_1, \dots, X_n)$ où $c(n)$ est une constante qui ne dépend que de n . Que vaut $c(n)$?
3. Comparer la qualité des estimateurs T_n et M_n .

Solution :

1. Comme $\theta = 2\mathbb{E}(X)$, on prend $T_n = 2\bar{X}_n = \frac{2}{n}(X_1 + \dots + X_n)$. On a $\mathbb{E}(X) = \theta/2$ donc $\mathbb{E}(T_n) = \theta$, de plus $\mathbb{V}(X) = \theta^2/12$ donc $\mathbb{V}(T_n) = \theta^2/3n$, on conclut que T_n est un estimateur sans biais convergent.
2. La fonction de répartition de la variable aléatoire $\text{Max}(X_1, \dots, X_n)$ est $F(x) = (x/\theta)^n$ sur $[0, \theta]$ donc la densité est donnée par

$$f(x) = n\theta^{-n}x^{n-1}\mathbf{1}_{[0, \theta]}(x)$$

et son espérance vaut donc $\frac{n\theta}{n+1}$. Pour obtenir un estimateur sans biais, on prend $c(n) = \frac{n+1}{n}$.

3. On a :

$$\mathbb{E}(M_n^2) = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \int_0^\theta n\theta^{-n}x^{n+1}dx = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \frac{n\theta^2}{n+2} = \frac{(n+1)^2\theta^2}{n(n+2)}$$

$$\text{d'où } \mathbb{V}(M_n) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}.$$

On constate que la vitesse de convergence de M_n est en $1/n^2$ alors que celle de T_n est en $1/n$. Donc M_n est plus performant que T_n .

SUJET Maths Approfondies 13

Exercice principal Maths Approfondies 13

Dans l'exercice toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

On considère une variable aléatoire X de fonction de répartition F et admettant une densité f .

Pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$, on considère n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et suivant la même loi que X .

On admet l'existence de variables aléatoires $Y_1, \dots, Y_n$ telles que, pour tout ω de Ω , les réels $Y_1(\omega), Y_2(\omega), \dots, Y_n(\omega)$ constituent un réarrangement par ordre croissant des réels $X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)$, de telle sorte que, pour tout ω de Ω :

$$Y_1(\omega) \leq Y_2(\omega) \leq \dots \leq Y_n(\omega) \quad \text{et} \quad \{X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)\} = \{Y_1(\omega), \dots, Y_n(\omega)\}$$

Pour tout réel x et tout entier non nul n , on note $S_n(x)$ la variable aléatoire définie par :

$$S_n(x) = \text{card} \{k \in \llbracket 1, n \rrbracket : X_k \leq x\}$$

1. Question de cours. Lois binomiales : définition, propriétés et allure de la fonction de répartition de la loi binomiale de paramètres $n = 2$ et $p = \frac{1}{2}$.
2. Donner, pour tout entier n non nul, la loi de $S_n(x)$.
3. (a) Comparer les événements : $[Y_k \leq x]$ et $[S_n(x) \geq k]$.
(b) En déduire, pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, une expression de $F_{Y_k}(x)$ faisant intervenir une somme (on ne cherchera pas à calculer cette somme).
(c) En déduire que, pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, la variable aléatoire Y_k est à densité et que la fonction f_{Y_k} définie pour tout x réel par :

$$f_{Y_k}(x) = k \binom{n}{k} (F(x))^{k-1} (1 - F(x))^{n-k} f(x)$$

est une densité de Y_k .

4. Montrer que si X admet une espérance, alors pour tout k de $\llbracket 1, n \rrbracket$, Y_k admet aussi une espérance.
5. Dans cette question on suppose que $n = 2\ell + 1$ est un entier impair et que X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose $W_n = Y_{\ell+1}$.
Etablir que $E(W_n) = \frac{1}{2}$ et commenter le résultat obtenu.

Solution :

1. Cours.
2. $S_n(x) \hookrightarrow B(n, F(x))$.
3. (a) $[Y_k \leq x] = [S_n(x) \geq k]$.
(b) D'après l'égalité ci-dessus on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} F_{Y_k}(x) &= P(S_n(x) \geq k) \\ &= \sum_{j=k}^n P(S_n(x) = j) \\ F_{X_k}(x) &= \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} (F(x))^j (1 - F(x))^{n-j} \end{aligned}$$

- (c) La v.a. Y_k est donc à densité puisque sa fonction de répartition a au moins les mêmes régularités que F . Par dérivation une densité de Y_k est donnée par :

$$\begin{aligned} f_{Y_k}(x) &= \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} [j f(x) (F(x))^{j-1} (1 - F(x))^{n-j} - (n - j) f(x) (F(x))^j (1 - F(x))^{n-j-1}] \\ &= k \binom{n}{k} f(x) (F(x))^{k-1} (1 - F(x))^{n-k} + \sum_{j=k+1}^n j \binom{n}{j} f(x) (F(x))^{j-1} (1 - F(x))^{n-j} \\ &\quad - \sum_{j=k}^{n-1} (n - j) \binom{n}{j} f(x) F(x)^j (1 - F(x))^{n-j-1} \\ &= k \binom{n}{k} (F(x))^{k-1} (1 - F(x))^{n-k} f(x) \end{aligned}$$

du fait que :

$$\sum_{j=k}^{n-1} (n - j) \binom{n}{j} f(x) F(x)^j (1 - F(x))^{n-j-1} = \sum_{j=k+1}^n (n - j + 1) \binom{n}{j-1} f(x) F(x)^{j-1} (1 - F(x))^{n-j}$$

et de l'égalité :

$$(n - j + 1) \binom{n}{j-1} = j \binom{n}{j}$$

4. Si X admet une espérance alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ est absolument convergente. Or.

$$0 \leq |x f_{Y_k}(x)| \leq k \binom{n}{k} |x f(x)|$$

puisque $|F(x)| \leq 1$ et $|1 - F(x)| \leq 1$.

La convergence absolue de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_{Y_k}(x) dx$ en résulte.

Bilan : $E(|X|) < +\infty \Rightarrow \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad E(|Y_k|) < +\infty$.

5. D'après ce qui précède une densité de W_n est donnée par

$$g(x) = (\ell + 1) \binom{2\ell + 1}{\ell + 1} x^\ell (1 - x)^\ell \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$$

On a ainsi : $g(x) = g(1 - x)$ et donc $\int_0^1 x g(x) dx = \int_0^1 (1 - u) g(u) du$ soit :

$$E(W_n) = 1 - E(W_n)$$

et donc $E(W_n) = \frac{1}{2}$.

Le résultat n'est pas surprenant (hormis la valeur exacte $\frac{1}{2} \dots$) du fait que W_n est la médiane de $X_1, \dots, X_{2n+1}$.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 13

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On considère l'application définie par $F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$.

1. Proposer un programme Python `F(x,...)` qui permet de calculer une valeur approchée de cette intégrale. Ce programme peut prendre plusieurs paramètres, mais contiendra à minima le paramètre `x` qui représente le réel x .
2. Déterminer la limite de F en $+\infty$.

Solution :

1. On propose une méthode de Monte-Carlo, pour rester dans l'esprit du programme... Cette fonction renvoie un tuple contenant l'estimation de l'intégrale et le demi-intervalle de confiance à 95%.

```
import numpy.random
import math

def F_MC(x,N):
    t = x+(x)*numpy.random.random_sample(N)
    p = 1.0/x
    f = numpy.exp(-t**2)
    moyenne = f.sum()/(N*p)
    g = f*f
    variance = g.sum()*1.0/(N*p*p)-moyenne*moyenne
    return (moyenne,math.sqrt(variance/N)*1.96)

print(F_MC(2,100))
>>> (0.005036331972694381, 0.0015823957466369176)
```

On peut aussi proposer par exemple le programme suivant, implémentant la méthode des rectangles :

```
import numpy

def F(x,N):
    t = numpy.linspace(x,2*x,N)
    f = numpy.exp(-t**2)
    return abs(f.sum()*x/N)

print(F(2,100))
>>> 0.00428968988573678
```

On remarque que l'on tend très vite vers 0.

2. On sait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$. Par conséquent, $\exists A > 0, \forall t > A, t^2 e^{-t^2} < 1$. Ou encore, $\forall t > A, 0 < e^{-t^2} < \frac{1}{t^2}$.

Ainsi, en intégrant, $\forall x > A, 0 < \int_x^{2x} e^{-t^2} dt < \int_x^{2x} \frac{1}{t^2} dt$. Or, $\int_x^{2x} \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_x^{2x} = \frac{1}{2x}$.

Par théorème d'encadrement, on en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$.

3. *Question subsidiaire* : Déterminer la dérivée de F .

$\forall x \in \mathbb{R}_+, F(x) = \int_0^{2x} e^{-t^2} dt - \int_0^x e^{-t^2} dt$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}_+, F'(x) = 2e^{-(2x)^2} - e^{-x^2} = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$.

SUJET Maths Approfondies 14

Exercice principal Maths Approfondies 14

1. **Question de cours** : Définition et propriétés de la moyenne empirique.
2. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$.

$$P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$$

Notons Z la variable aléatoire égale à n si n est le plus petit entier tel que $X_n = 0$ et $Z = +\infty$ sinon.

- (a) Pour $n \geq 0$, calculer $P(Z = n)$ puis $P(Z > n)$. En déduire que Z est presque sûrement finie i.e. $P(Z = +\infty) = 0$.
 - (b) Calculer $E(Z)$ et $V(Z)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit T la variable aléatoire égale à n si n est le plus petit entier tel que $X_{n-1} = X_n = 1$ et $T = +\infty$ sinon.
 - (a) Calculer $P(T = 1)$, $P(T = 2)$, $P(T = 3)$ et $P(T = 4)$.
 - (b) Montrer que $P(T > n) \leq (3/4)P(T > n - 2)$ pour tout $n > 2$. En déduire que T est presque sûrement finie
 - (c) Montrer que pour tout $n \geq 3$:

$$P(T = n) = \frac{1}{2}P(T = n - 1) + \frac{1}{4}P(T = n - 2)$$

- (d) Montrer que $E(T)$ est finie et déterminer $E(T)$ (On ne demande pas de calculer la loi de T).
4. On suppose le paramètre p de la loi de Bernoulli des variables (X_n) quelconque. Donner un programme python pour estimer $E(T)$ à partir d'un échantillon de la variable T .

Solution :

1. **Question de cours** : Moyenne empirique. ECG2 p.23. (estimateur sans biais et convergent)

$$(a) \quad P(Z = n) = P(X_0 = 1, \dots, X_{n-1} = 1, X_n = 0) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$P(Z > n) = 1 - P(Z \leq n) = 1 - \sum_{i \leq n} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

On a $\{Z = +\infty\} \subset \{Z > n\}$ donc

$$P(Z = +\infty) \leq P(Z > n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

pour tout n donc $P(Z = +\infty) = 0$.

(b)

$$E(Z) = \sum_{n \geq 0} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1/4 \sum_{n \geq 1} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1/4 \times \frac{1}{(1 - 1/2)^2} = 1$$

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \sum_{n \geq 0} n^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1 =$$

$$\frac{1}{4} \left(\frac{2}{(1 - 1/2)^3} - \frac{1}{(1 - 1/2)^2} \right) - 1 = 2$$

2. (a)

$$P(T = 1) = P(X_0 = X_1 = 1) = 1/4$$

$$P(T = 2) = P(X_0 = 0, X_1 = X_2 = 1) = 1/8,$$

$$P(T = 3) = P(X_1 = 0, X_2 = X_3 = 1) = 1/8$$

$$P(T = 4) = P(X_0 X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = X_4 = 1) = 3/4 \times 1/8 = 3/32$$

(b) On a $\{T > n\} \subset \{T > n-2, X_{n-1} X_n = 0\}$ et les événements $\{T > n-2\}$ et $\{X_{n-1} X_n = 0\}$ sont indépendants, donc

$$P(T > n) \leq (3/4)P(T > n-2)$$

Posons $u_n = P(T > n)$, on a $u_n \leq (3/4)u_{n-2}$ donc $\lim u_n = 0$.

$P(T = +\infty) \leq u_n$ pour tout n donc $P(T = +\infty) = 0$.

(c) Soit $n \geq 3$,

$$P(T = n) = \frac{1}{2}P(T = n|X_0 = 0) + \frac{1}{4}P(T = n|X_1 = 1, X_0 = 1)$$

$$+ \frac{1}{4}P(T = n|X_1 = 0, X_0 = 1)$$

Comme $P(T = n|X_0 = 0) = P(T = n-1)$, $P(T = n|X_1 = 0) = P(T = n-2)$ et $P(T = n|X_1 = 1, X_0 = 1) = 0$ pour $n > 2$, on a

$$P(T = n) = \frac{1}{2}P(T = n-1) + \frac{1}{4}P(T = n-2)$$

- (d) $P(T > n) \leq (3/4)^{n/2}$ d'où $P(T = n) \leq (3/4)^{(n-1)/2}$, donc la série $E(T) = \sum_{n \geq 1} nP(T = n)$ converge.

$$E(T) = \sum_{n \geq 1} nP(T = n) = \frac{1}{4} + \sum_{n \geq 2} nP(T = n)$$

$$E(T) = \frac{1}{4} + \sum_{n \geq 2} \left[\frac{1}{2}(n-1)P(T = n-1) + \frac{1}{4}(n-2)P(T = n-2) \right] +$$

$$\sum_{n \geq 2} \left[\frac{1}{2}P(T = n-1) + \frac{1}{4}2P(T = n-2) \right]$$

$$E(T) = \frac{5}{4} + \frac{3}{4}E(T) \Rightarrow E(T) = 5$$

3. import random

```
def estimer_instant_deux_succes(probabilite_succes, taille_echantillon, nombre_simulations):
    # Estime l'instant moyen de deux succes consecutifs dans une suite de variables aleatoires de Bernoulli
    instants_deux_succes = []

    for _ in range(nombre_simulations):
        bernoulli_variables = [1 if random.random() < probabilite_succes else 0 for _ in range(taille_echan]

        for i in range(1, taille_echantillon):
            if bernoulli_variables[i] == 1 and bernoulli_variables[i - 1] == 1:
                instants_deux_succes.append(i)
                break

    if instants_deux_succes:
        moyenne_instants = sum(instants_deux_succes) / len(instants_deux_succes)
        return moyenne_instants
    else:
        return -1 # Retourne -1 si deux succes consecutifs n'ont pas ete trouves dans les simulations

# Parametres
probabilite_succes = 0.5 # Probabilite de succes
taille_echantillon = 100 # Taille de l'echantillon
nombre_simulations = 1000 # Nombre de simulations

# Estimation de l'instant moyen de deux succes consecutifs
instant_moyen = estimer_instant_deux_succes(probabilite_succes, taille_echantillon, nombre_simulations)

if instant_moyen != -1:
    print(f"L'instant moyen de deux succes consecutifs est estime a environ {instant_moyen:.2f}.")
else:
    print("Deux succes consecutifs n'ont pas ete observes dans les simulations.")
    L'instant moyen de deux succes consecutifs est estime a environ 5.07.
```

Exercice sans préparation Maths Approfondies 14

Soit (x_n) une suite réelle qui converge vers le réel m . On pose :

$$\forall (p, k) \in (\mathbb{N}^*)^2, u_{p,k} = \max\{x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+k}\}$$

1. Ecrire un programme Python **u(x,p,k)** qui renvoie le terme $u_{p,k}$. Ce programme prend en paramètres la suite (x_n) et les entiers p et k . Pour un entier n , on accèdera au terme x_n par l'appel **x(n)**.
2. Pour k fixé, on pose $w_p = u_{p,k}$. Etudier la suite (w_p) .
3. Pour p fixé, on pose $v_k = u_{p,k}$. Etudier la suite (v_k) et montrer qu'elle converge.

Solution :

1. On propose le programme suivant :

```
def u(x,p,k):  
    i=2  
    u=x(p+1)  
    while i<k+1:  
        if x(p+i) >u:  
            u = x(p+i)  
    return u
```

2. Ecrivons d'abord que la suite (x_n) converge vers m .

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad m - \epsilon < x_n < m + \epsilon$$

Fixons $k \in \mathbb{N}^*$. Alors, $\forall p \geq n_0, \quad p+1, p+2, \dots, p+k$ sont aussi plus grand que n_0 . On peut donc appliquer la définition précédente :

$$\forall i \in \{1, \dots, k\}, m - \epsilon < x_{p+i} < m + \epsilon$$

C'est en particulier le cas du maximum des $(x_{p+i})_{i \in \{1, \dots, k\}}$. Donc on a que

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \geq n_0, \quad m - \epsilon < w_p < m + \epsilon$$

Ce qui veut exactement dire que (w_p) converge vers m .

3. Fixons $p \in \mathbb{N}^*$. Par définition, $v_{k+1} = \max\{x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+k+1}\} \geq \max\{x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+k}\} = v_k$. La suite (v_k) est donc croissante. D'autre part, (x_n) est convergente, donc majorée : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq M$. On a donc en particulier que $v_k \leq M$.

Puisqu'elle est croissante et majorée, la suite (v_k) converge vers une limite dépendant de p , qu'on note m_p .

4. *Question subsidiaire* : Montrer que la suite (m_p) converge et donner sa limite.

On réutilise la définition de la convergence de (x_n) :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall p \geq n_0, \quad m - \epsilon < \max\{x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+k}\} < m + \epsilon$$

On peut donc passer à la limite sur k , dans cette inégalité. Lorsque k tend vers $+\infty$,

$$m - \epsilon \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} \max\{x_{p+1}, x_{p+2}, \dots, x_{p+k}\} \leq m + \epsilon$$

On remarquera le passage aux inégalités larges. Ceci nous assure que la limite de (m_p) existe et vaut m . En effet,

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p \geq n_0, \quad m - \epsilon < m_p < m + \epsilon$$

SUJET Maths Approfondies 15

Exercice principal Maths Approfondies 15

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension $n > 1$. On note (E) l'espace vectoriel des endomorphismes de E . Soit f un endomorphisme tel que $\forall k < n, f^k \neq 0$ et $f^n = 0$. On appelle *commutant de f* l'ensemble :

$$\mathcal{C}(f) = \{ g \in (E) \mid f \circ g = g \circ f \}$$

1. Question de cours : Donner la définition d'une famille libre d'un espace vectoriel.
2. Montrer que $\mathcal{C}(f)$ est un sous espace vectoriel de (E) .
3. Soit $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$. Montrer que la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est une base de E .
4. Soit $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$. Soit $\phi_a : \mathcal{C}(f) \mapsto E$ définie par $\phi_a(g) = g(a)$. Montrer que ϕ_a est un isomorphisme.
5. En déduire que $\mathcal{C}(f) = \text{Vect}(Id, f, \dots, f^{n-1})$.

Solution :

Solution :

1. EC1, p9.
2. Tout d'abord, il est clair que $\mathcal{C}(f) \subset (E)$. Ensuite, l'endomorphisme nul commute bien avec f .

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, et $(g, h) \in \mathcal{C}(f)^2$. Alors, $f \circ (\lambda g + \mu h) = \lambda(f \circ g) + \mu(f \circ h) = \lambda(g \circ f) + \mu(h \circ f) = (\lambda g + \mu h) \circ f$. Ainsi, $\mathcal{C}(f)$ est bien un sous espace vectoriel de (E) .

3. Tout d'abord, on dispose bien de $a \in E$ tel que $f^{n-1}(a) \neq 0$, puisque $f^{n-1} \neq 0$. Montrons que la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est libre. Soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1})$ tels que $\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^i(a) = 0$.

Soit $j \in \{0, \dots, n-1\}$. On applique f^{n-1-j} , pour obtenir n équations. Ainsi,

$$\forall j \in \{0, \dots, n-1\}, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i f^{n-1-j+i}(a) = 0$$

En remarquant que $\forall k \geq n, f^k(a) = 0$, on obtient successivement que $\lambda_{n-1} = 0$, puis $\lambda_{n-2} = 0$, jusqu'à $\lambda_0 = 0$. Ainsi, la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est libre dans E .

Cette famille contient n éléments, qui est la dimension de E . la famille $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ est donc une base de E .

4. — Montrons d'abord que ϕ_a est une application linéaire. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, et $(g, h) \in \mathcal{C}(f)^2$. On a que $\phi_a(\lambda g + \mu h) = \lambda g(a) + \mu h(a) = \lambda \phi_a(g) + \mu \phi_a(h)$, d'où la linéarité.
- Soit $g \in \ker(\phi_a)$. Par définition, $g(a) = 0$. Mais on a aussi que $g(f(a)) = f(g(a)) = f(0) = 0$. En itérant ce procédé, on montre que $\forall i \in \{0, \dots, n-1\}, g(f^i(a)) = 0$. On a donc montré que g est nul sur la base $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$. Ainsi, g est l'application nulle (i.e. $g = 0_{\mathcal{C}(f)}$). Ceci prouve l'injectivité de ϕ_a .
- Soit $b \in E$. On considère $g \in (E)$ définie telle que

$$g(a) = b, \quad g(f(a)) = f(b), \quad \dots, \quad g(f^{n-1}(a)) = f^{n-1}(b)$$

L'application g considérée est bien définie, puisqu'elle l'est sur une base de E . De plus, elle vérifie que $g \circ f = f \circ g$ sur cette base. On a donc que $g \in \mathcal{C}(f)$ et que $g(a) = b$. Ceci prouve la surjectivité de ϕ_a .

Tout ceci montre que ϕ_a est un isomorphisme.

5. Remarquons tout d'abord que $\text{Vect}(Id, f, \dots, f^{n-1}) \subset \mathcal{C}(f)$. En effet, toute combinaison linéaire d'applications de $(Id, f, \dots, f^{n-1})$ commute avec f . Ensuite, puisque ϕ_a est un isomorphisme, $\dim(\mathcal{C}(f)) = \dim(E) = n$. Par inclusion et égalité des dimensions, on conclut que $\mathcal{C}(f) = \text{Vect}(Id, f, \dots, f^{n-1})$.

Exercice sans préparation Maths Approfondies 15

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes et suivant chacune la loi normale centrée réduite.

Soient a un réel et Δ la droite d'équation cartésienne :

$$\Delta : y = ax$$

On note Y la variable aléatoire égale au carré de la distance de $M = (X_1, X_2)$ à Δ *i.e.* :

$$Y = \left(d(M, \Delta)\right)^2$$

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire Y .

Solution :

Soit

$$\vec{v} = (a, -1)$$

un vecteur normal à Δ .

En notant $p_{\Delta^\perp}$ la projection orthogonale sur $\Delta^\perp$ on a :

$$p_{\Delta^\perp}(M) = \left\langle \overrightarrow{OM}, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\rangle \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{aX_1 - X_2}{\sqrt{1+a^2}} \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

Il en résulte que :

$$Y = \|p_{\Delta^\perp}(M)\|^2$$

et ainsi

$$E(Y) = \frac{E((aX_1 - X_2)^2)}{1 + a^2}$$

Or, par indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2 et par stabilité des lois normales, on a :

$$aX_1 - X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(0, a^2 + 1)$$

et ainsi :

$$E((aX_1 - X_2)^2) = V(aX_1 - X_2) = 1 + a^2$$

Finalement :

$$E(Y) = 1$$